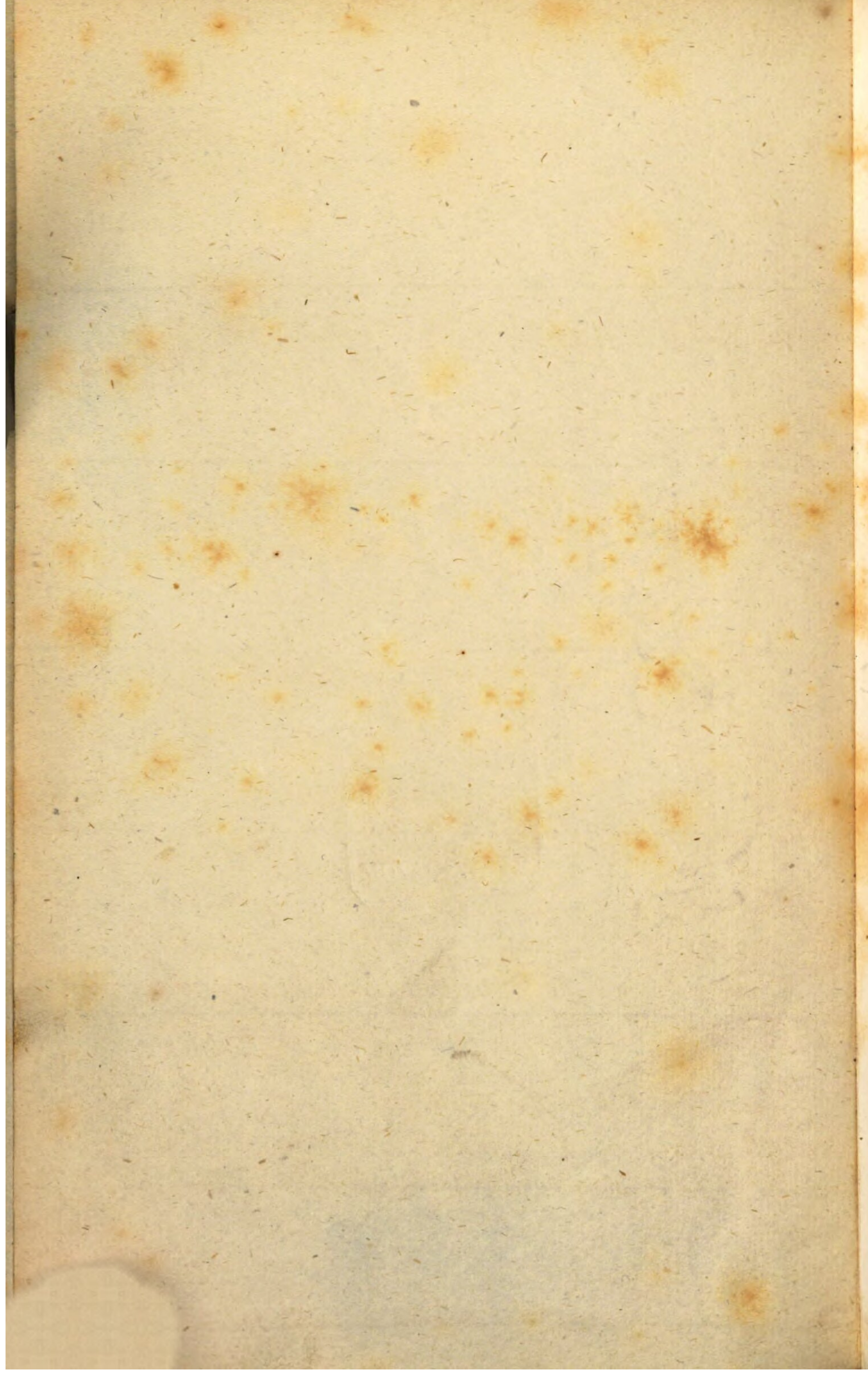




Math. P.

Roman

530²

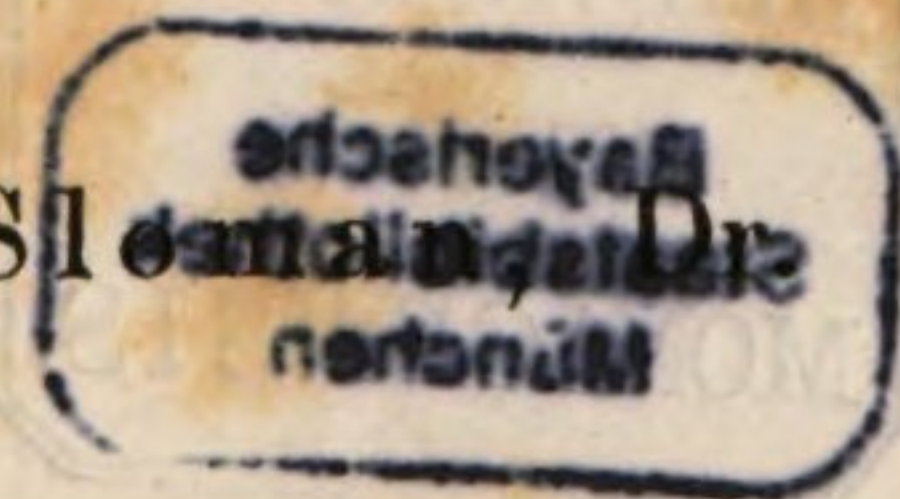


Versuch
die
Differenzialrechnung
auf andre
als die bisherige Weise zu begründen.

Eine mathematische Abhandlung

von

H. Steiner, Dr.



Paris
bei E. Glaeser.
1856.

g5 = Bg.

Versuch

die

Differentialrechnung

auf andre

als die bisherige Weise zu begründen.

Eine mathematische Abhandlung



Paris

bei E. Gieseler

1858

Sr. Wohlgeboren

dem Herrn

Candidat John

in Hamburg

Es kommen mir in die Erinnerung alle Zeiten und Orte, denn als ich vor Kurzem unter Ihrer Führung die Grenzen dieser Beziehung zu berühren suchte, war mein Begüben eine Rückkehr zur Liebe der Mathematik nach dem Umweg (denn so will ich hier einmal sagen) der hiesigen philosophischen Studien, mit dem ich meine Musse erfüllt hatte, und wenn es auch Ihnen wohl kaum im Gedächtnis ist, dass wir Gymnasiasten die kleine vom Feuer verzehrte Treppe hinaufstiegen, und die Kegelschnitte bei Ihnen studirten, so ist

Dr. Wohlgeborn

dem Herrn

Candidat John

in Hamburg



VORREDE

Wie wenig die geistlichen Herren der Mathematik ihren Zweck erfüllen, indem sie die Sache herzugeben, ihr auf irgend eine Weise zusätzlich beizubringen suchen, aber nicht in ihr

Es kommen mir in die Erinnerung alte Zeiten und Orte, denn als ich vor Kurzem unter Ihrer Führung die Grundpfeiler dieser Rechnung zu berühren anfang, war mein Beginnen eine Rückkehr zur Liebe der Mathematik nach dem Umweg (denn so will ich hier einmal sagen) der bloss philosophischen Studien, mit denen ich meine Musse erfüllt hatte, und wenn es auch Ihnen wohl kaum im Gedächtniss ist, dass wir Gymnasiasten die kleine vom Feuer verzehrte Treppe hinaufstiegen, und die Kegelschnitte bei Ihnen studirten, so ist

mir doch diese Erinnerung sowohl deutlich als
lieb, und ich danke Ihnen nochmals für jene erste
wie für diese letztere Unterweisung.

Eine grosse Freude gewährt es mir, wenn
ich Ihnen diese Arbeit widmen darf, um Ihnen
meine besondere Hochachtung so wie ich es ver-
mag auszusprechen.

Paris, 15. Februar 1856.

H. Sloman, Dr.

V O R R E D E.

Wie wenig die gewöhnlichen Beweise der Mathematik ihren Zweck erfüllen, indem sie um die Sache herumgehen, ihr auf irgend eine Weise äusserlich beizukommen suchen, aber nicht in ihr Inneres eindringen, das glaube ich an der Taylor'schen Reihe, gleichsam zur Einleitung, zeigen zu können. Ein ergreifendes Drama entfaltet die Geschichte der Mathematik, wenn sie den Antheil zur Entscheidung bringen will, den beinahe der grösste Engländer und der grösste Deutsche an der Erfindung der Differenzialrechnung jeder für sich zu beanspruchen berechtigt ist. Zwischen 1665 und 1675 fand die Erfindung statt, und erst vierzig Jahre später entbrannte der Streit, den jene beiden grossen Männer, Newton und Leibnitz, im hohen Alter auf Tod und Leben kämpften, jeder um sich den grösseren Theil der Erfindung zuzuwenden. Zu dem Streit gab die di-

recteste Veranlassung die Freude, die man im Lager der Deutschen Mathematiker empfand, als man einen Fehler in den Werken des Englischen Geometers entdeckt hatte. Newton hatte erklärt in der Binominal-Potenz Entwicklung

$$(x + o)^m = x^m + mx^{m-1} o + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} o^2 + \dots$$

seien die Coefficienten von o die successiven Differenziale dieser Function. Im *Commercium epistolicum* Leibnitii et Bernoulli II S. 310 und S. 495 sieht man, wie Bernoulli darüber an Leibnitz schrieb (Juni 1713): Vides hanc regulam Newtoni falsam esse. Nam excepto primo et secundo termino reliqui omnes abludunt a differentialibus superioribus, nam differentialis secundus non est $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-1} b^2$ sed simpliciter $m \cdot m - 1 a^{m-1} b^2$ et ita de reliquis. Agnatus meus mihi ostendit Newtonem in suo errore perseverasse usque ad annum 1711 quo libellus ejus, cui titulus „Analysis etc.“ qui antea Tractatui Optico erat adnexus, fuit recusatus, utpote in quo sicuti in praecedenti editione, Tractatui Optico adnexa, adhuc idem asserit. Auch öffentlich rügte Bernoulli diesen Newtonschen Fehler. Montuda histoire des mathématiques III S. 105 drückt sich darüber so aus: Bernoulli inséra dans les actes de Leipsick, sous un nom déguisé une lettre fort amère, ou Newton était peu ménagé;

il y prétendait que Newton n'avait jamais connu les règles de la seconde différenciation, ou celle de prendre la fluxion d'une fluxion, et il se fondait sur ce que Newton dans son traité de quadratura curvarum, dit, que les fluxions des différents degrés sont représentées par les termes de son binome

$$x^m + [m x^{m-1}] \dot{x} + \left[\frac{m(m-1) x^{m-2}}{1.2} \right] \dot{x}^2 + \dots;$$

or cela n'est vrai qu'en supprimant les dénominateurs numériques. Car si l'on prend la fluxion, ou la différentielle, de mx^{m-1} , on aura pour seconde différentielle seulement $[m.(m-1) x^{m-2}] \dot{x}^2$. Mais il est évident, que c'était une pure inadvertence de Newton, séduit un instant par une analogie qui regne entre sa formule et les fluxions successives. Cette pièce (in den actes de Leipzig) était si aigre, que Bernoulli a été long temps sans l'avouer, mais il était facile de l'y reconnaître. Dieser berühmte Newtonsche Fehler, der bis auf den heutigen Tag als solcher gegolten hat, den Taylor als er sein Theorem fand, nicht wiederholte, indem er sich wohl hütete, in seiner Reihe

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

die Newtons Reihe, $(x+h)^m$ als einen ihrer Fälle befasst, nichts als die successiven Differenziale zu finden, dieser Newtonsche Fehler, in welchen alle

andren Geometer bis auf den heutigen Tag, mit Ausnahme Newtons, nicht hineinfallen zu können überzeugt sind, weshalb sie für solche Reihen wie die Taylorsche, viele Beweise erfunden haben, dieser Newtonsche Fehler ist gar kein Fehler, sondern die Wahrheit, Taylor's Reihe, also Newton's Binom sind wirklich, wie Newton sagte, nichts als die Differenziale. Wir werden dies leicht beweisen, also leicht zeigen können, dass Newton's Ansicht richtig ist, und dass die Ansicht der Geometer nach ihm unrichtig ist.

Die Frage der Differenzialrechnung ist diese: wie wächst eine beliebig complicirte Gesetzlichkeit im Verhältniss zu dem Wachsen irgend eines Theiles derselben? Es fragt dies die Algebra und es antwortet darauf die Differenzialrechnung. Nun trifft es sich, dass die Algebra (weil sie diejenige Ordnung, Gesetzlichkeit betrachtet, die durch die Eins entsteht) nur sieben oder wenn man will, nur zwei Rechnungsarten kennt (nämlich nur Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenziren, Radiziren und Logarithmiren, welche sieben als nur zwei Arten erscheinen, wenn man bedenkt, dass Potenziren eine Art des Multiplicirens ist, dass Logarithmiren und Radiziren die Umkehrungen des Potenzirens also ebenso wie das Dividiren, nur rückwärts gehendes Multipliciren sind, ausser welchem, dem Multipliciren, also nur zwei-

tens das Addiren, dessen Zurückgehen das Subtrahiren ist, in Betracht kommt). Also die Algebra, die nur Multipliciren und Addiren kennt, ist die Fragende, und die Differenzialrechnung soll sagen, wie irgend eine, zwar auch nur aus Addiren und Multipliciren bestehende Gesetzlichkeit (Function) im Ganzen wächst, wenn ein Theil in ihr wächst, also ihr Wachsen im Verhältniss zu dem Wachsen eines Theils in ihr. Es ist fehlgeschossen, wenn man supponirt, dass dieses Verhältniss auch durch Addiren und Multipliciren ausdrückbar sein muss, es kann vielmehr dies Verhältniss ein so verwickeltes sein, dass es durch Addiren und Multipliciren gar nicht ausgedrückt werden kann. Daher ist die Differenzialrechnung, und die Function, die ihr Wachsen, im Verhältniss zu dem Wachsen irgend eines Theiles in ihr, beschreiben soll, in Verlegenheit. Ich kann, sagt die Function, der armen Algebra, die nur sieben oder nur zwei Rechnungsarten kennt, gar nicht sagen, das wievielfache der Differenz in einem Theile in mir, die Differenz, die dadurch in meinem Ganzen entsteht, ist, denn das ist nicht durch eine Multiplication zu fassen, auch nicht durch Addition, auch nicht durch eine Potenzirung, auch nicht durch ein Logarithmiren, und auch nicht durch noch so viele dieser Rechnungsarten, die man zusammen addiren oder von einander

subtrahiren oder sonst mit einander in Verbindung bringen oder cumuliren möchte; aber ich kann es auf folgende Weise sagen: man denke zwei Factoren $a \times b$ und man denke zu dieser Multiplication den, diese ungenügende Rechnungsart rectificirenden, die Multiplication also verändernden, Gedanken, dass der eine Factor a nicht still hält, um sich multipliciren zu lassen, sondern sich verändert. Man wird antworten, dann könne man ihn nicht mit bestimmtem Erfolg multipliciren, aber diesen Einwand beseitigt die Differenzialrechnung dadurch, dass sie auch sagt, wie diese Veränderung beschaffen ist. Auf diese Weise kann die Function jetzt in den beiden armen Rechnungsarten, Addiren und Multipliciren, sagen, welche Differenz ihr Ganzes in sich spürt, wenn ein Theil in ihr irgend eine Veränderung erleidet. Wenn die Function die Form x^m hat, und x der Theil ist, der sich ändert, und man nimmt den einfachsten Fall x^2 , so antwortet die Function jetzt mit diesem Gedanken, welcher die Differenzialrechnung ist, dass ihre, der Function x^2 , Veränderung wenn das x in ihr um dx grösser wird, ein vielfaches dieses dx , nämlich $2x$ mal dx sei, wobei aber zu bedenken sei, dass in dem Coefficienten $2x$ kein die Multiplication gestattendes Constantes, sondern ein sich auch fortwährend Veränderndes gegeben ist, über dessen Veränderung nun ein zweites Wort also nachfol-

gen muss, ehe man die Regel versteht. Dieses zweite Wort ist das zweite Differenzial. Nemlich es muss nach der Antwort $2x$ mal dx gleich auch noch gesagt werden wie sich $2x$ verändert (im Verhältniss zu der Veränderung des einen Theils in der Function, auf den wir uns ja immer beziehen) dieses zweite Wort, das zweite Differenzial ist in diesem Falle 2 mal dx^2 , d. h. es verändert sich, damit das Resultat der Multiplication nicht unrichtig bleibe, der Coefficient, das was man mit dx multipliciren soll, der erste Differenzialquotient sich so, dass das Verhältniss seiner Veränderung nicht zu dx , sondern zu dx^2 beschrieben ist, wenn man sagt, sie verhalten sich wie zwei zu Eins.

Also die Differenzialrechnung kann nicht mit einem Worte sagen, das Wievielfache einer Veränderung, die ein Theil der Function erleidet, die Veränderung des Ganzen (der Function) sei, aber sie sagt es in zwei (oder in noch mehreren) Worten, in die erste Multiplication die sie befiehlt eine zweite hineinschachtelnd, in diese wieder eine dritte hineindenkend u. s. w. Der Coefficient zu der Multiplication, die sie befiehlt, ist selbst das Resultat einer zweiten Multiplication, die sie also gleichzeitig mit befehlen muss. Nur wenn die Function (die Gesetzlichkeit) einfach ist z. B. mx , dann kann sie mit einem Worte sagen, das Wievielfache

des Zuwachses zu einem Theil in ihr (zum x) der Zuwachs ist, den sie im Ganzen erleidet: ist der Zuwachs zu x z. B. dx , so ist der Zuwachs, den diese einfachste Function, mx , erleidet, m mal dx . Dies eine Wort, dieses eine Differenzial, genügt hier. Ist aber die Gesetzlichkeit nur ein wenig complicirter, nemlich x^2 , so kann in allen sieben Rechnungsarten der Algebra nicht ausgedrückt werden, um wieviel diese aus zwei Theilen (dem x und seinem Exponenten 2) bestehende Function sich vergrößert, wenn ihr einer Theil x sich um ein gegebenes, etwa um dx , oder um 3, oder um h , vergrößert, es kann der Coefficient der zum dx , zu 3, oder zu h , hinzukommen muss, gar nicht beschrieben werden, als durch eine neue achte Rechnungsart, die nicht mit einem Worte, sondern mit zwei Worten auszusprechen ist, von denen das erste Wort lautet $2x dx$ und das zweite $2 dx^2$, dieses erste Wort redet von der Function, und das zweite Wort redet von dem ersten Wort. Das zweite ist die Rectification des ersten. Das erste Wort $2x dx$ sagte, meine Differenz ist dx multiplicirt mit etwas was ich vorläufig $2x$ nennen will, wovon mein zweites Wort Dir sagt, da es nicht stille hält, sondern auch ein Wachsendes ist, dass dessen Wachsen im Verhältniss zum Wachsen des x ist $2 dx^2$. Nun ist alles gesagt, was nöthig ist. Je verwickelter die Function ist, desto häufiger muss die Re-

gel ansetzen, desto mehr Worte gebraucht sie um zu sagen was sie zu sagen hat, um so weiter hin muss sie die letzte Antwort hinausschieben, die zu allen andern Antworten das Complement bringt. Die meisten Gesetzlichkeiten kommen selbst nie zum letzten Wort, z. B. gleich die einfach scheinende Gesetzlichkeit $x^{\frac{1}{2}}$, oder $\sqrt{x}$ kann nie zu diesem letzten Wort kommen, sie hat unendlich viele Differenziale, d. h. sie ist den sieben Rechnungsarten incommensurabel. Die Taylor'sche Reihe thut nun nichts weiter, als dass sie nach dierer Regel die Rechnung wirklich vollzieht. Differenzialrechnung und Taylorsche Reihe sind also identisch, wie Newton es aussprach, der die Taylor'sche Reihe nur in ihrem einen Falle der Binomial-Potenz-Reihe in Betracht zog, die Taylor dann erst allgemein bedachte. Taylor's Reihe setzt, wie die Differenzialrechnung es vorschreibt, die Differenz des Ganzen gleich den sämtlichen Differenzialcoefficienten immer multipliziert mit dem Zusatz zum x mit h , h^2 , h^3 , h^4 , u. s. w. und theilt vom zweiten Gliede an mit (2) ; (2.3) ; $(2.3.4)$; $(2.3.4.5)$; also überhaupt durch $(1.2.3.4 \dots n)$, verletzt aber durch diese Theilung die Vorschrift oder Differenzialrechnung nicht, da diese Theilung sich ganz von selbst versteht. Die bisher nur abstract ausgesprochene Regel der Differenzialrechnung lautet nämlich natürlich in der Anwendung (wenn die Veränderung,

welche der Theil der Function erleiden soll, bestimmt als ein Schritt z. B. als h gesetzt wird) speciell so: wenn in einer Function ein Theil um einen Schritt sich vergrößert, so vergrößert sich das Ganze nicht unbedingt um ein Vielfaches des Einen Schrittes, sondern um ein Vielfaches dieses einen Schrittes mit der Nebenbedingung, dass man noch einen Schritt, also 2 Schritte mache, um das zweite Wort auch ausführen, das zweite Differenzial auch berechnen zu können. Die Differenzialrechnung gestattet also gar nicht $(x + h)^2 - x^2$ allein zu berechnen, sondern, da hier zwei Worte, zwei Differenziale, in Frage sind, so muss man auch noch $(x + h + h)^2 - x^2$ berechnen. Erst dann, nicht schon wenn die Function nur einmal den Zusatz h empfangt, kann man dem zweiten Wort Geltung verschaffen. In der Theorie und abstract kann die Regel wohl sagen: die Differenz des Theiles nehme man h mal einen Coefficienten, der seinerseits auch noch Differenzen in sich hat, die h^2 mal ein Constantes sind. Aber in der Anwendung, wenn die Abstraction den schweren Tritt in die Wirklichkeit thut, kann erst von zwei Differenzen, nicht von einer gesagt werden, dass sie auch noch eine Differenz zwischen sich haben. Man wird immer die Reihe 1, 4, 9, 16, 25, 36, . . . als ein Beispiel der Function x^2 gelten lassen (in

welchem Sinne wird S. 45 der folgenden Abhandlung deutlich). In dieser Reihe ist h oder $dx =$ Eins gesetzt, also aus dem x welches selbst zu erst Eins ist, wird successive

$$x + dx = 2,$$

$$2 + dx = 3$$

$$3 + dx = 4$$

und x^2 ist also in diesem Falle, wenn statt x successive $x + dx$ gesetzt wird, jene Reihe:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36 \dots$$

$$3, 5, 7, 9, 11 \dots$$

$$2, 2, 2, 2 \dots$$

Wir haben nun auch ihre successiven Differenzen darunter geschrieben und sehen gleich, dass nicht zwei Zahlen der Hauptreihe, von denen immer eine x , und die andere $x + dx$ ist, also nicht Ein Schritt sondern allererst drei Zahlen der Hauptreihe: x ; $x + dx$; und $x + dx + dx$ zusammen kommen, und also berechnet sein müssen, ehe eine Zahl der dritten Reihe erscheint und berechnet werden kann. Zwei Zahlen haben eine Differenz. Drei Zahlen haben zuerst zwei Differenzen, und dann kann zwischen ihnen eine neue Differenz erscheinen und berechnet werden. Z. B. 4, 9, und 16 haben die zwei Differenzen 5 und 7, und jetzt erst kann von Differenzen der Differenzen zwischen 5 und 7 die Rede sein. In der Theorie kann man ineinander schachteln,

was in der Realität neben einander steht. Indem daher Taylor eine Function, oder wie er gleich thut alle Functionen, nur für eine Differenz derselben berechnen will, muss er, in Betreff des zweiten Differenzials sich denken, dass er zwei Differenzen berechnet hätte, und da er dies allendlich doch auf eine Differenz reduzieren will, so muss er den Betrag der 2. Differenz durch zwei theilen. Man sieht, dass er also den Betrag der dritten Differenz durch drei mal zwei theilen muss und so fort, seine Reihe, da sie nur Eine Differenz, nemlich $f(x + h) - fx$, geben soll, ist also

$$h f'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f'''(x)}{2 \cdot 3} + \dots \quad \text{Das ist}$$

der Beweis des Taylor'schen Satzes und andere Beweise desselben sind, glaube ich, schlechte Beweise. Newton hatte Recht, zu sagen, in seiner Reihe, dem Binominal-Potenz-Theorem, seien die Glieder selbst die Differenziale. Mit Unrecht redet man wie von etwas ganz neuem, wenn man die Taylorsche und ähnliche Reihen zu erwähnen hat, und sagt, man wolle jetzt einmal Functionen in Potenzen entwickeln. Dies klingt gleich als ob man die Wahl hätte, als ob die Algebra anders als nur in successiven Potenzen und in Additionen einen Begriff fassen, ordnen könnte. Man vergisst, dass die Algebra nichts andres hat als Potenzen und Additionen.

Es ist zu oft gesagt worden, die Richtung eines Curvenpunktes sei dessen Tangente. Dies ist falsch. Die Richtung des Curvenpunktes ist die Curve. Nur weil man durch einen gradlinigten Messapparat durch Parallelcoordinaten, durch grade Linien, die Richtung des Curvenpunktes bestimmen will, so kann man dies nicht durch eine sondern nur durch zwei Bemerkungen bestimmen, indem man zuerst sagt, die Richtung des Punktes sei seine Tangente, aber gleich berichtigend hinzufügt, dies sei erst dann wahr, wenn das Gesetz der Tangenten Aenderung noch hinzugedacht werde. Auch dieses Gesetz kann wieder der Bemerkungen mehrere, von denen die erste falsch und die folgenden sie zu berichtigen dienen sollen, erfordern, mit andern Worten, das Gesetz der Tangentenänderung kann wieder eine Curve sein, die wir, um sie an geraden Linien zu messen, wieder ebenso behandeln müssen, wie die erste Curve, indem wir ihre Richtung zuerst falsch beschreiben durch Angabe der Richtung ihrer Tangenten, und dann die Berichtigung dieser zuerst falschen Beschreibung hinzufügen. So erreichen wir die Rectification der Curve. Um diese ist es zu thun, wenn man sie an geraden Linien messen will. Manchmal gelingt die Rectification der Curve (man gestatte dieses Wort in diesem Sinne) nicht indem immer noch eine Curve übrig bleibt, zur Bestimmung der letz-

ten von beliebig vielen sich bestimmenden, und ihre Bestimmung berichtigenden graden Linien. Dieses Nichtgelingen ist sogar die Regel dort, wo die Gleichung der Curve eine andere ist, als $y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \dots$. Tritt in der Gleichung ein gebrochener Exponent auf (nur dass $y = \sqrt[m]{x}$ wieder in $x = y^m$ zurückfällt), wie z. B. in der Gleichung des Kreises $y = (a - x)^{\frac{1}{2}}$ so ist die Rectification unmöglich, wodurch kurz die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises vorliegt, da diese Function eine unendliche Menge von Differenzialen hat, d. h. da die Richtung der Curve, wie einfach sie auch von ihrem Gesichtspunkte aus ist, (und nichts kann ja einfacher sein, wenn von Richtungen die Rede ist, als die Richtung im Kreise) im Verhältniss zu nur gradlinigten Richtungen, also ausgedrückt durch nur gradlinigte Richtungen, von denen jede folgende gradlinigt die Unrichtigkeit der vorhergehenden beseitigen will, natürlich sehr verwickelt, und geradezu unmöglich sein kann. Der Grund dieser Schwierigkeit, die Richtung eines Kreises zu fassen, liegt in dem Eigensinn des Beschauers, der diese Richtung durchaus durch gradlinigte Richtungen beschreiben, definiren, fassen will. Derselbe Eigensinn ist in der Algebra in der Arithmetik zu Hause. Die Zahlen sind gleichsam eine grade Linie, oder sie sind die ein-

fachste Ordnung, nämlich diejenige, welche durch die Eins in das Viele hineingebracht wird. Eigensinniger Weise verlangt diese Ordnung, dass jede Gesetzlichkeit ihr sich füge. Diese einfache eigensinnige Ordnung, welche die Eins erzwingt, kennt nur zweierlei Rechnungsarten, Multiplication (mit den Unterarten Division, Potenz, Wurzel, Logarithmus) und Addition (mit der Subtraction). In diese Ordnung sollen alle Gesetzlichkeiten der Welt sich fügen, aber sie thun dies nicht immer. Bisweilen fügen sie sich, aber die Regel ist, dass sie widerstreben. Deshalb muss die Differenzialrechnung den Umweg der mehreren Differenziale wählen, um in der (eigensinnigen) wortkargen Sprache der eingeführten Zahlenordnung das was sie zu sagen hat, auszusprechen, und doch kommt sie durch ihren klugen Umweg oft nicht zu ihrem letzten Wort, da von manchen Functionen die Anzahl der Differenzen auch wieder kein Ende hat. Sollten wir nun nicht unsren Eigensinn aufgeben? Sollten wir an den Kreis z. B. nicht lieber einen andren Messapparat anlegen, als den gradlinigten der Parallelcoordinaten, da der Kreis sich diesem Messapparat sogar nicht fügen will? Und so in allen anderen Fällen?? Setzen wir gleich hier die Antwort hin: Nein! der Messapparat darf nicht verändert werden, obgleich sich die Welt ihm schwer anpasst, denn wir wollen Verwickeltes ent-

wickeln, wir müssen daher die einfachste Ordnung zu Grunde legen, und dieses ist die Eins und ihre Functionen, die Algebra. Aber! messen wir denn nicht den Kreis und andere Curven auch durch Polarcoordinaten?, vereinfacht nicht dies wirklich in vielen Fällen die Gleichung, also den Ausdruck der betrachteten Gesetzlichkeit? Allerdings. Es wäre jedoch zu voreilig geschlossen, wenn man glaubte, durch Polarcoordinaten das Mass ganz krummlinigt gemacht, und die gerade Linie als Mass beseitigt zu haben. Die Geometrie (oder der Raum) ist der Zusammenhang von allen Richtungen, hat also unendlich viele Richtungen, und nicht wie man sagt nur drei, die nemlich nur deshalb, was man vergisst, auf drei sich beschränken, weil eine grade Richtung diese beabsichtigte Ordnung in die vielen Richtungen bringen soll, weil eine grade Richtung als zukünftiges Mass gedacht ist, nemlich zunächst eine grade Ebene, dann irgendwo eine perpendikulare Ebene auf der ersten und dann wiederum irgendwo auf jene beiden perpendikular die dritte Richtung. In diesen drei (graden) Richtungen, Ebenen, bleiben noch unendlich viele Messapparate, die gradlinigt, oder krummlinigt, gedacht werden können, möglich. Aber diejenigen krummlinigten Messapparate, die man Polarcoordinaten nennt, haben also die gerade Richtung als Mass nicht beseitigt, da dieses System in der

graden Ebene gedacht wird, und es auch noch eine gerade Linie, den Radius vector, zum Hauptbestandtheil hat. Allerdings vereinfachen sich nun die Masse einiger Raumgesetzmäßigkeiten, wenn, nachdem man der unendlich vielen Richtungen des Raumes durch grade Masse, durch drei Ebenen, Herr geworden ist, in der graden Ebene statt der, wieder nur graden Parallelmessung, nun Polarcoordinaten gedacht werden, der Kreis z. B. ist im Polarcoordinaten-Ausdruck so einfach wie im Parallelcoordinaten-Ausdruck eine Parallellinie, die Gleichung beider ist $y = a$. Der Radius vector ist im Kreise constant $= a$ und sein Differenzial ist Null. Ebenso einfach ist die Gleichung der Parallellinie, wenn man das andere Masssystem der Parallelcoordinaten an sie anlegt, dann ist sie (wie der Kreis) $y = a$ (auch die Kreislinie ist überall parallel, nemlich dem Mittelpunkt, steht überall von ihm gleichweit ab und die Parallellinie überall gleichweit von einer andren graden). Nachdem also die grade Linie, die grade Richtung, einmal angefangen hat, der unendlich vielen Richtungen des Raums durch Eintheilung desselben in drei Richtungen Herr zu werden, (von denen dann anfangs in der Planimetrie nur zwei als existirten sie allein betrachtet werden), kann von diesen zwei Richtungen, in welche die Ebene eingetheilt gedacht wird, die eine als Curve, als krummlinigte Richtung, bisweilen

mit Vorthail gesetzt werden. Das ist das Polar-coordinatensystem. Aber die Gleichung der graden Linie wird durch dieses Polarcoordinatensystem nun ebenso sehr erschwert, wie die Gleichung des Kreises dadurch erleichtert wird. Diejenige Gesetzlichkeit, die dem jedesmal gewählten Messapparat am analogsten ist, wird am leichtesten durch ihn gefasst, und am schwersten durch den anderen Messapparat, und umgekehrt. Was einerseits gewonnen wird, wird andererseits verloren, und der graden Richtung kann (wie es scheint) kein Messapparat entbehren, da wir Menschen endliche Wesen sind, die das Schwierige nur im Verhältniss zu Leichterem begreifen. Es ist also auch in der Algebra wohl nothwendig, den Eigensinn der Gradlinigkeit, d. h. die einfache Ordnung, welche die Eins durch ihre blosse Wiederholung (so wie S. 84 zu der folgenden Abhandlung die Rede davon ist) einführt, beizubehalten. Bisjetzt hat wenigstens die Rechnung andre Masse, also andre als die zwei (oder sieben) Rechnungs-Arten (Addition und Multiplication) zu benutzen nicht gewagt, obgleich man Geometer auffordern möchte, über die Möglichkeit andrer Masse so viel als möglich nachzudenken. Die Differenzialrechnung supponirt jedenfalls nur den gewöhnlichen Messapparat der beiden Rechnungsarten und weil die Differenzialrechnung in solcher eigensinnigen aber einfachen Sprache das was sie

zu sagen hat nicht einfach ausdrücken kann, so drückt sie es durch mehrfache successive Regeln aus, die in einander hineingeschachtelt sind, und sich einander berichtigen sollen, und die nur alle zusammen, nicht einige von ihnen allein, die Wahrheit enthalten, wobei es oft geschieht, dass das letzte Wort, der eigentliche Schlussstein des Gebäudes nie ausgesprochen werden kann. In ähnlicher Weise sind die Kategorien, also die Worte unsrer Sprache, die Folge eines vereinfachenden logischen Messapparates, in welchen wir eigensinnig die Wahrheit zu fassen beabsichtigen, ohne je zu Ende zu kommen, da die Wahrheit das Ewige, Göttliche, sich diesem Eigensinn nicht fügt, und doch sich ihm fügen muss und soll, wenn wir nicht an der Berechtigung unsres Standpunktes, unsrer Vernunft verzweifeln sollen. Was ist die Eins, welche Berechtigung hat die Eins? das ist die (letzte) Frage der Rechnung. Im Raum ist die Frage eine andre. Der Raum ist Zusammenhang, nur die Zahl ist Discretion. Der Zusammenhang misst sich durch zwei, die ihr Zusammensein anschauen. Während daher das Mass der Zahl die Eins ist, so ist das Mass des Raumes nicht Eins, ein Punkt, sondern zwei Punkte d. h. eine gerade Linie, das Verhältniss zweier zu einander, das einfachste was dort möglich ist. Nichts in der Welt ist bloss Discretion, und nichts bloss Zusammenhang. Was dis-

cret d. h. eine Eins ist, hat doch immer auch Zusammenhang mit allem Andren. Die Algebra bestreitet dies, sie supponirt, dass gar kein Zusammenhang in der Welt existire, denn die Zahl kennt kein Zusammen sie ist wesentlich (nur) Discretion. Dies ist eine Uebertreibung, und die Algebra ist insofern eine Uebertreibung. Der Raum andererseits ist die Uebertreibung der entgegengesetzten Abstraction, als ob nur Zusammenhang Continuität in der Welt sei, als ob das Ganze nur eines sei, keine Individuen in sich gestattend. Diese beiden Uebertreibungen sind zunächst der Messapparat, den unser Denken an die Wirklichkeit hinanlegt. Beide Abstractionen ergänzen sich und suchen zusammen die Wahrheit.

Wir bitten dass man diese nicht eigentlich hierher gehörenden Bemerkungen entschuldige und fügen in einer andren Gedankenrichtung nur kurz noch wenig hinzu. In dem in jeder Beziehung vortrefflichen Buche die „Differenzialrechnung“ sagt Snell S. 15. „Hier ist nun der Ort, wo wir genauer und bestimmter anzugeben haben, was wir von einer vollständigen Lehre von den höheren Differenzialquotienten verlangen, und was wir an der gangbaren Lehre vermissen. Nach der gewöhnlichen Ansicht über die Bedeutung der höheren Differenzialquotienten sagt uns z. B. der zweite Differentialquotient einer durch y vorgestellten

„Function von x nur etwas über die Eigenthüm-
 „lichkeit des Wachsens der Grössen $\frac{dy}{dx}$ und x , kei-
 „neswegs aber über die der Grössen y und x .
 „Ebenso wird man durch den dritten Differenzial-
 „quotienten der Function y wieder auf andre Grö-
 „ssen verwiesen, indem derselbe nur über die mo-
 „mentane verhältnissmässige Stärke des Wachsens
 „der beiden Grössen $\frac{dy^2}{dx^2}$ und x , direct aber über
 „die Natur des Wachsens der beiden Grössen y und
 „ x , deren dritten Differenzialquotienten man hat,
 „und über deren Art des Wachsens man doch
 „wohl eigentlich einen Aufschluss erwarten sollte,
 „uns gar nicht belehrt. — — — S. 18. Wenn
 „vielleicht noch Jemand einredete, die successiven
 „Differentialquotienten einer durch y vorgestellten
 „Function von x sollen eben weiter nichts bedeu-
 „ten, als dass jeder folgende Differentialquotient
 „die verhältnissmässige Stärke des Wachsens des
 „vorhergehenden und der willkürlich Veränderlichen
 „ x ausdrückt, keineswegs aber sollen sie uns über
 „die Natur des Wachsens der Grössen y und x
 „belehren, welches nur der erste Differentialquo-
 „tient der Function zu leisten hat, indem er die
 „momentane Stärke des Wachsens der Grössen y
 „und x angiebt, so erwidre ich: Nun gut, wenn
 „das ist, so muss denn diejenige Lehre, welche

„zum Zweck hat, die früher erwähnten über die
 „blosse momentane Stärke des Wachsens der Ver-
 „änderlichen hinausreichenden weiteren Eigenthüm-
 „lichkeiten des Wachsens, die doch offenbar vor-
 „handen sind, zu entwickeln, und in Gesetze zu
 „fassen, noch neu erfunden werden. Denn jede
 „genügende Theorie der Gesetze des gemeinschaft-
 „lich fortschreitenden Wachsens der Grössen wird
 „diese Untersuchungen nicht abweisen können, und
 „um einen vollständigen Begriff zu haben von der
 „in jedem Verflusspunkt vorhandnen wahren Be-
 „schaffenheit des Wachsens, muss man die Functio-
 „nen auffinden, welche diese inneren Modificationen
 „des Wachsens anzugeben im Stande sind. Aber
 „diese Functionen brauchen wir zum Glück nicht
 „weit zu suchen, denn die höheren Differentialquo-
 „tienten leisten, wie wir in dem Folgenden sehen
 „werden, dies alles aufs Beste.“ Bis soweit redet
 Snell. Wir setzen hinzu: wahrlich wenn so die
 Besten reden müssen, so sieht es noch dunkel in
 der Wissenschaft aus. Kommen nemlich die ci-
 tirten richtigen vortrefflichen Bemerkungen nicht
 ganz so heraus, als ob Herr Professor Snell um
 Entschuldigung bittet, dass er sich die grosse Frei-
 heit genommen von der Bedeutung der höheren Dif-
 ferenziale zu reden. Wir bitten nicht so um Ent-
 schuldigung, und behaupten, dass die Bedeutung
 der höheren Differenziale immer in Beziehung auf

die Function selbst zu nehmen ist, dass nur diese Beziehung gerade das ist, worauf es ankommt. Man wird einwenden, dass wir übertreiben, indem die Tangente, wenn sie auch wirklich nicht die Richtung des Curvenpunktes sein möchte (dass man für solches Eingeständniss noch zu danken hat!!!), doch ihrerseits irgend etwas ist. Wir antworten: es sagt die Differenzialrechnung allerdings gleichsam beiläufig und nebenbei auch etwas über alle die einzelnen Stadien, deren sie sich als Mittel bedient, um über das Ganze ihrer Absicht gemäss die mehreren Worte zu reden, aber heisst es nicht die Pferde hinter den Wagen spannen, wenn z. B. man von der Entwicklung $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sagen wollte, sie lehre etwas über $2ab$ indem sie zeige, dass $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$ sei. Die Grösse von $2ab$ ist ja nur etwas neben bei in Betracht Kommendes in dieser Gesetzlichkeit die sich mit $(a + b)^2$ befasst. In jeder Gesetzlichkeit ist alles von einander abhängig, aber wenn das Wachsen einer Function z. B. von $(x + y)^3$ in Frage ist die Entwicklung $x^3 + \frac{d(x^3)}{dx} y + \dots$ anzuhalten, und zu glauben man sei nun schon am Ende, blos weil dieses Stück der Wahrheit auch geometrisch als ein Stück der Wahrheit, als Tangente, construirt werden kann (die ja doch eben nicht die Curve ist) das ist in

der That eigentlich unerlaubt, und das thut unter allen Neueren nur Snell nicht, indem er die directe Bedeutung der höheren Differenziale für die Curve selbst, nicht bloss für ihre Tangenten, und für die Tangenten ihrer Tangentencurven (so könnte man reden) in Anspruch nimmt, die in der Wissenschaft bisher vernachlässigt war. Wenn der Kreis durch gradlinigte Messung gefasst gedacht wird, und die Messlinie, die Abscisse, horizontal (durch den Kreis) gelegt ist, so lehrt die Anschauung dass die Curve sich von der graden Linie aufhebt, irgendwo ihren höchsten Punkt erreicht, dann sich wieder herabsenkt (ebenso wird unterhalb der Messlinie sich der zweite Halbkreis bilden). Die Gleichung des sogemessenen Kreises ist bekanntlich $y^2 = 2ax - x^2$. Denken wir uns nun die Tangenten aller Kreispunkte, so wird nur eine von ihnen oberhalb (und eine unterhalb) mit jener Abscissen-Messlinie parallel liegen, nemlich die Tangente des höchsten Punktes den die Hebung der krummen Linie des Kreises erreicht. Der allgemeine Richtungsausdruck der Tangente ist das erste Differenzial und das erste Differenzial einer Function ist im höchsten Punkte bekanntlich Null. Da nun aber aus dem Begriff des Kreises anderweitig bekannt ist, dass die Richtung jenes höchsten Punktes für den das erste Differenzial Null ist, (weil seine Tangente der

Messlinie parallel liegt) in gar nichts verschieden ist von der Richtung aller andern Punkte des Kreises, jener Punkt nicht etwa länger stille steht als die andern Punkte, etc. so sieht man gleich, dass das zweite (und die folgenden) Differenziale zur Bestimmung der Richtung jenes Punktes, also aller Punkte auch nothwendig sind. Alle Differenziale sind an jedem Punkte in Existenz. Dass zwei erste Differenziale, also zwei Tangenten nöthig sind, ehe von ihrem Verhältniss, d. h. von dem höheren zweiten Differenzial geredet werden kann ist richtig und beweist nicht, dass also für je einen Punkt nur die Tangente, nur das erste Differenzial normgebend (Richtung anzeigend) sei. Im Gegentheil. Wie die Taylor'sche Reihe durch ihre Dividirungen die sämtlichen höheren Differenziale auf einen Differenzfall zu repartiren im Stande ist (indem in der Algebra in der Discretion an die Stelle der Curve ein Polygon tritt, weil die Eins zu dem Messapparat der Geometrie als neues Messinstrument noch hinzutritt), so ist im Raum in der Geometrie viel weniger schwer das Polygon dieser mehreren Tangenten als gradlinigter Versuch der Messung einer Curve zu begreifen und einzusehen, dass der eine Curvenpunkt die Richtung schon hat, die durch alle successiven Differenziale angedeutet wird, denn das erste Differenzial, die Tangente allein, ist doch wirklich nicht die Richtung

der Curve. Man hat gesagt die Differenziale seien etwas was nicht zur Ausführung komme. Dies ist ganz richtig, wenn man jedes Differenzial einzeln z. B. das erste nur allein im Auge hat. Einzeln kommt keins zur Ausführung, sondern jedes kommt so zur Ausführung wie das folgende davon redet, und in der einfachen angeführten Kreislinie hat also jeder Punkt die Richtung nicht seiner Tangente, sondern dieser Tangente mit der Nebenbemerkung, dass ihre Richtung eine andere sei, welche durch das zweite Differenzial bestimmt werden soll, welches zweite Differenzial aber wieder das dritte zu Hülfe ruft u. s. w., weil durch grade Linien zu sagen was diese Curve ist, nicht anders und nur so annähernd möglich ist. Um auch die höheren Differenziale geometrisch zu construiren, verbannt Snell die Tangentenveränderung als räumliche Darstellung des 2. Differenzialcoefficienten und führt statt dessen berührende Curven ein. Dies ist ganz interessant, und man sieht daraus recht deutlich, wie die Algebra auf den Raum angewendet, nicht nothwendig nur eine Bedeutung annimmt, sondern je nachdem man conventionell sich verschieden stellt, bekommt dieselbe analytische Formel verschiedene räumliche Bedeutungen. Nach Snell sind z. B. die drei ersten Differenziale des Kreises wie folgt zu zeichnen:



wo *aa* eine grade Linie (die gewöhnliche Tangente oder das erste Differenzial) ist, die Parabel *bb* das zweite Differenzial, und die Curve dritter Ordnung *cc* das dritte Differenzial räumlich fasst (Snell's Zeichnung ist eine andre, Fig. 57). Diese Darstellung ist sehr interessant, aber sie bedenkt nicht, dass die Bedeutung der höhern Differenziale für die Curve nicht bei jedem Differenzial eine selbstständige ist, sondern in jedem höheren Differenzial die Bedeutung hat erst das niedere Differenzial zu rectificiren und mit ihm zusammen bedeutend für die Curve zu werden. Die gemeine Darstellungsart des zweiten Differenzialcoefficienten, welche Snell bestreitet, ist also doch die richtige, d. h. die Tangente ist das erste Differenzial, und ihres Neigungswinkels Veränderung ist das zweite, und wenn Snell mit Recht darauf aufmerksam macht, dass das dritte und vierte Differenzial nun gar nicht räumlich gefasst werden könne, so liegt dies eben darin, dass der Raum zwar das unendliche Ausser-einander ist, aber dieses reducirt auf nur drei Dimensionen. In der Fläche sind der Dimensionen nur zwei, der Raum als Fläche kann also nur zwei Differenziale neben einander legen. Es ist der

Vortheil der Geometrie die Klarheit, der Vortheil der Algebra, dass sie in verwickeltere Verhältnisse hineingeht. Dass man das zweite Differenzial und die höheren auch als Curven fassen kann, bleibt jedoch freilich ganz richtig.

Ich kann nicht umhin noch ein Wort über Eleganz hinzuzusetzen. Man nennt es besonders in Frankreich, glaube ich, elegant, wenn man z. B. sagt (cours d'Analyse par Duhamel membre de l'Institut 1847 seconde édition S. 26) — on a choisi (!) un certain nombre très limité de fonctions auxquelles on est convenu (!) de chercher à ramener toutes les autres. Ces fonctions, que l'on désigne sous le nom de fonctions simples sont les suivantes, dans lesquelles a désigne une quantité indépendante de la variable x :

$$a + x, a - x, ax, \frac{a}{x}, x^m, a^x$$

(die sieben Rechnungsarten) $\sin. x$ (die trigonometrischen Functionen). Solche Redeweise (also namentlich z. B. der Ausdruck „on est convenu“ etc.) soll glaube ich elegant sein, ist aber sehr schlecht, weil dadurch zu denken gegeben wird, dass dies alles nur conventionell sei! Als ob es nur conventionell wäre, dass wir die Algebra mit ihren sieben Rechnungsarten haben, als ob man denken sollte, es sei conventionell und zufällig, dass wir rechnen, d. h. eine Eins

supponiren und ihre einfachste Wiederholung oder Ordnung, die Zahlen, denken. Wäre dies nur conventionell, so würde man noch dringender, als wir schon gethan haben, anempfehlen müssen, über die Möglichkeit, diese Convention aufzugeben, nachzusinnen, da die Algebra nicht schon stolz auf ihre Resultate hinweisen darf, vielmehr die Nichtintegrität der meisten Functionen die verhältnissmässige Armuth unsres Masssystems zu verrathen scheint. Diese elegante Manier sich auszudrücken, deren Wesen Unphilosophie ist, indem man das Nothwendige als Zufälliges spöttisch und übermüthig darstellt, ist nicht die richtige. Ausserdem besteht die Eleganz in einer coquettirenden Ueberrumpfung beim Beweisen, wogegen sich schon viele Stimmen erhoben haben, und in einer architectonischen Freude an der äusserlichen Symmetrie der Formeln. Die Gleichung der graden Linie, wenn zwei ihrer Punkte gegeben sind, schreibt man dann z. B. am liebsten

$$Y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (X - x')$$

oder gar

$$\frac{Y - y'}{X - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

anstatt ehrlich zu gestehen, dass

$$Y = \left(\frac{y' - y''}{x' - x''} \right) X + \left[y' - \left(\frac{y' - y''}{x' - x''} \right) x' \right]$$

Diese letztere Schreibart, oder algebraische Denkweise ist, obgleich für das Auge nicht so symmetrisch, für den Geist viel klarer, da sie es gleich fasst, dass das Ende der Formel

$$\left[y' - x' \left(\frac{y' - y''}{x' - x''} \right) \right]$$

die Constante, und Y das zu Bestimmende ist. Es liesse sich der Ausdruck auch auf jene andren Weisen als

$$\frac{Y - y'}{X - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

u. s. w. logisch denken, aber dann müsste man dieses logische Denken auch in dem Worttext fassen. Wenn aber der Worttext die Sprache der Formel ignorirt, ihr widerspricht, und also zwei verschiedene Sprachen geredet werden, so kann ich meinerseits das nicht elegant und nicht erträglich finden. Es ist richtig, dass eine architectonische Symmetrie angestrebt werden darf, aber sie muss eine innere Bedeutung haben, und diese muss ausgesprochen werden, also der Worttext mit der Formel in Einklang gebracht werden (cf. S. 38 Z. 20).

Dass die bisherigen Erklärungsweisen der Differenzialrechnung in der folgenden Abhandlung kaum der Beachtung gewürdigt werden, wird man begreifen. Gegen diese bisherigen Begründungsweisen sagt Hr. Prof. Snell (Band I. S. 125): „Wir wollen die vielen Versuche, die man gemacht hat, um die

Schwierigkeiten des Begriffs der Differenzialrechnung auf eine listige Weise zu umgehen, nicht näher namhaft machen; — — Irgend ein Widerspruch, der viel schlimmer ist als der erste, wird unvermerkt untergeschoben, und durch weitläufige Erklärungen verdeckt, und man schmeichelt sich dabei, das Gebäude der Mathematik befestigt zu haben, wenn man die klaffenden Risse der Widersprüche nothdürftig verschmiert hat“.

Paris, December 1855.

H. Sloman, Dr.

Es ist zu lesen:

- Seite V anstatt vom Feuer verzehrte l. jetzt längst vom Feuer verzehrte
- „ VIII anstatt Montuda l. Montucla.
- „ XIII Z. 10 anstatt unrichtig bleibe l. im Abstracten unbestimmt
und im Concreten unrichtig bleibe
- „ XV Z. 24 anstatt Vorschrift oder Differenzialrechnung l. Vorschrift
der Differenzialrechnung
- „ XX Z. 8 anstatt $y = (a - x)^{\frac{1}{2}}$ l. $y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$
- „ 84 Z. 1 anstatt In der n^{ten} Ordnung etc. l. In n Ordnungen ist
die Anzahl der Zahlen mit der Null 2^n
- „ 111 Z. 8 anstatt voraus l. woraus.
- „ 141 Z. 23 anstatt On l. Or.
-

INHALTSVERZEICHNISS.

Vorrede. S. VII—XXXVII.

Erstes Capitel. Die Differenzialrechnung betrachtet durch die Subtraction. S. 1—17.

Zweites Capitel. Die variable Grösse, die Gegensätze zwischen Aufgabe und Auflösung, die Gleichung oder Copula. S. 18—34.

Drittes Capitel. Die zwei Rechnungsarten und Reihen, oder Ordnungen, die arithmetische und geometrische. S. 35—48.

Viertes Capitel. Die Differenzialrechnung. S. 49—58.

Fünftes Capitel. Das erste Differenzial. S. 59—72.

Sechstes Capitel. Die höheren Differenziale. S. 73—78.

Anmerkungen und Zusätze. S. 79 ff.

INHALTSVERZEICHNIß

Vorrede	S. VII—XXVII
Erstes Capitel. Die Differentialrechnung partiell durch die Spitzaction	S. I—11
Zweites Capitel. Die variable Größe, die Gegenstände zwischen Angabe und Auflösung, die Gleichung oder Copula	S. 12—31
Drittes Capitel. Die zwei Rechnungsarten und Methoden, oder Ordnungen, die arithmetische und geometrische	S. 32—49
Viertes Capitel. Die Differentialrechnung	S. 49—58
Fünftes Capitel. Das erste Differential	S. 59—72
Sechstes Capitel. Die höheren Differentiale	S. 73—78
Anmerkungen und Zusätze	S. 79 ff.

Erstes Capitel.

Die Differenzialrechnung betrachtet durch die Subtraction.

Es ist eine Hauptfrage der Differenzialrechnung, wie vergrössert sich die Potenz, im Vergleich zu der Vergrößerung ihrer Wurzel, also z. B. wie vergrössert sich x^2 , wenn sich ihre Wurzel x , zu $x + k$ vergrössert. Es soll also die Vergrößerung der Function verglichen werden mit der Vergrößerung der Variablen. Die einfache Subtraction

$$(x + k)^2 - x^2$$

fasst diese gesuchte Vergrößerung. Das Ausrechnen dessen was dieser Ausdruck andeutet ist

$$(x^2) + 2xk + k^2 (- x^2)$$

also einfacher

$$2xk + k^2$$

welcher Ausdruck die Vergrößerung der Potenz enthält und mit der Vergrößerung der Wurzel, welche $= k$ ist verglichen, also getheilt

$$\frac{2xk + k^2}{k} = \frac{2x + k}{1} = 2x + k$$

bekanntlich als Resultat giebt, was mit dem Zeichen

$$\frac{\Delta(x^2)}{\Delta x} = \frac{\Delta(x^2)}{k} = 2x + k$$

oder in Worten ausgedrückt wird: die endliche Differenz

in der Potenz verhält sich zu der Differenz in der Wurzel wie $2xk + k^2$ sich zu k verhält, d. h. wie $2x + k$ zu Eins, mit welchem Resultat man nun in der Differenzialrechnung nicht zufrieden ist, und deshalb eine Veränderung damit vornimmt. In dem Ausdruck

$$\frac{\Delta(x^2)}{\Delta x} \text{ oder } \frac{\Delta(x^2)}{k} = 2x + k$$

setzt man an die Stelle des grossen griechischen Buchstaben (Δ) den kleinen Römischen d um anzuzeigen, dass k sich nun sehr, und zwar unendlich verkleinert, wobei es an der einen Seite der Gleichung ganz verschwindet, und also das frühere Resultat nun zu

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

wird.

Weshalb man mit der Subtraction, so wie sie gewöhnlich ist, nicht zufrieden ist, und deshalb Verkleinerungen die bis zur Vernichtung gehen, vornimmt, das untersucht man nicht. Wir wollen dies untersuchen, also sehen, ob und in wiefern man mit der gewöhnlichen Subtraction unzufrieden sein kann, und werden dann finden, dass ein Vernichten nicht nöthig ist.

Die Subtraction mag ihre Wirkung auf den Fall der Potenz zuerst in einigen Zahlenbeispielen betrachten. Wir wollen der Wurzel (dem x) successiv mehrere Werthe geben, z. B.

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \dots$$

dann ist in der Potenz in x^2 gleichfalls eine davon abhängige Mehrheit von Werthen

$$4, 16, 36, 64, 100, 144, 196 \dots$$

und die Subtraction findet je einen Werth mit einem andern Werth, also die Vergrösserungen der Potenz und die Vergrösserungen der Wurzeln mit einander vergleichend,

dass während die subtractivischen Differenzen in den Wurzeln sich immer gleich sind:

$$2 - 0 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$12 - 10 = 2 \text{ u. s. w.,}$$

die in den Potenzen entstehenden subtractivischen Differenzen sich nicht gleich, sondern verschieden sind:

$$4 - 0 = 4$$

$$16 - 4 = 12$$

$$36 - 16 = 20$$

$$64 - 36 = 28.$$

Die Subtraction findet also in den Potenzen eine Verschiedenheit, aber bis jetzt nur in den verschiedenen Fällen, in welchen ein Subtractionsresultat dem andern nicht gleich ist, und erwartet, dass zwischen nur zwei Potenzen, also innerhalb eines einzigen Falles ihr Subtractionsresultat jedenfalls sich selbst gleich bleibt, widrigenfalls sie an sich selbst zu zweifeln gezwungen sein würde. Sie untersucht indess, um sich darüber zu vergewissern, auch dies, indem sie eine halbe Subtraction im Gedanken betrachtet. Sie findet $64 - 36 = 8^2 - 6^2 = 28$, also die halbe Subtraction $= 14$ und erwartet nun, dass dies auch wirklich so sei, also dass $8^2 - 7^2 = 14$ und $7^2 - 6^2$ auch $= 14$ sei, sie findet aber $8^2 - 7^2 (= 64 - 49) = 15$ und $7^2 - 6^2 (= 49 - 36) = 13$. Also selbst innerhalb einer Subtraction ist sich diese nicht gleich, sie ist in der einen Hälfte 13, in der andern Hälfte 15. Also die eine Subtraction gilt nicht einmal ohne weiteres innerhalb ihres eignen Umfangs, sondern auch darin ist Verschiedenheit. Hierdurch erfährt die Subtraction, dass mit ihrer nur einfachen Antwort es hier nicht gethan ist. Die Verschiedenheit ist hier gleichsam überall, nicht blos sind zwei Zahlen verschieden von einander, sondern auch zwischen nur zwei Zahlen, wo die eine Subtraction sich hinstellt, finden noch Verschie-

denheiten statt. Also ist die Subtraction, die zwei Grössen nur an einander legt, und mit nur einer Antwort sagen will, welche eine Verschiedenheit dort ist, nicht genügend. Jede kleinste Stelle zwischen den beiden Grössen ist verschieden, will ihre eigne Antwort haben. Also die einfache Subtraction sieht, dass sie nicht genügt. Indem wir uns umsehen, finden wir denn auch bald etwas, was die Ursache davon sein kann. Es scheint nemlich die Frage, wie wächst oder ändert sich die Potenz, wenn die Wurzel wächst? eine gewöhnliche Subtractionsfrage zu sein, aber genau betrachtet ist sie doch davon verschieden. Die Subtraction fragt, um wie viel ist eine Grösse grösser als die andere? In dieser Frage sind also zwei Grössen. Wird nun aber gefragt, welchen Einfluss dies auf die Potenz hat, so ist die Potenz in einer einzigen Grösse gedacht, und an diese eine Grösse der Potenz tritt die Frage, um wieviel sie vermehrt wird, durch das was in der Wurzel zwei Stellen thun. Diese zwei Stellen als Ursache werden auch zwei Stellen als Wirkung haben, aber grade dies ist schlimm, denn nun müsste also die Frage vielleicht werden: welche Wirkung haben die zwei Stellen der Ursache auf die beiden Stellen ihrer Wirkung. In dem gewöhnlichen Fall $7 - 4 = 3$ ist nichts anderes zu fragen und zu antworten. Zwei Grössen haben eine dritte zu ihrem einen Unterschied zwischen sich. Aber wenn jede der beiden Grössen zur Potenz wird, also zwei neue Grössen auftreten, so genügt die Frage, welche Wirkung die Differenz der Wurzel auf nur eine von den beiden auftretenden neuen Grössen auf nur eine von den beiden entstehenden Potenzen hat, nicht, wenn man nicht supponirt, dass in beiden der Effect gleich ist. Diese Supposition ist aber hier nach der Erfahrung, die die Subtraction schon gleich gemacht hat, eine falsche, da die gleichen Subtractivitäten der Wurzel ungleiche Subtractivitäten der Potenz zur Wir-

kung haben. Sprechen wir die Frage allgemein in Buchstaben aus, so wie es immer geschieht, so fühlen wir das Gesagte nur noch deutlicher. Die Differenzialrechnung fragt, wie vergrössert sich x^2 wenn x sich um k vergrössert. Indem die Subtraction diese Frage beantworten will, ist sie gezwungen $(x + k)^2$ hinzuzunehmen. Da sieht man, dass sie statt einer Frage nun zwei Fragen hat, x^2 und $(x + k)^2$. Mit andren Worten, wenn x zu $x + k$ wird, so kann ich nicht mehr einfach fragen, wie vergrössert sich x^2 , sondern wie vergrössert sich das was entsteht, welches eben nicht allein x^2 , sondern $(x + k)^2$, also beides ist. Die Differenzialrechnung fragt aber, wie verändert sich x^2 , diese *eine* Grösse, wenn x zu $x + k$ wird. Die Subtraction, die hier zu dem x^2 auch $(x + k)^2$ hinzuzieht, wo die Wirkung eine andere als in x^2 ist, muss also eine falsche Antwort geben, wenn nicht die Frage der Differenzialrechnung falsch war. Augenscheinlich ist aber die Frage der Differenzialrechnung genauer und specieller, muss also die richtige sein. Die scheinbar eine Frage, um wieviel wächst die Potenz wenn ihre Wurzel wächst, zertheilt sich also, wie wir sehen, in mehrere, in die Fragen: um wieviel wächst die Potenz am Anfang ihres Wachsens, um wieviel in der Mitte oder an irgend einem andren Zeitpunkt oder andrem Ort ihres Wachsens. Von Zeit und Ort kann hier nur bildlich die Rede sein, da die Zahl, die Algebra, die Differenzialrechnung, vor Zeit und Raum existiren, d. h. eine noch höhere Abstraction, noch immaterieller und gegenstandsfreier sind, als Zeit und Raum. Aber mit oder ohne diese bildlichen Ausdrücke sehen wir, dass die Grösse der Veränderung in der Potenz eine verschiedene ist am Anfang und anderswo, dass man beide also nicht zusammen werfen, mehrere Fragen nicht für eine halten darf, nicht blos fragen darf, um wieviel wächst x^2 wenn die Wurzel x um k wächst. Denn wenn

x um k wächst, so ist das, was als Potenz wächst, nicht x^2 , sondern ein Fragliches, welches am Anfang x^2 , am Ende $(x + k)^2$ ist.

Irgend etwas muss die Antwort der Subtraction doch bedeuten. Man wird leicht zugeben, dass sie wohl einen Durchschnitt des überall verschiedenen Wachsens bedeuten wird. Auf die Frage, wie wächst im Anfang die Potenz, wo sie noch x^2 ist, antwortet die Subtraction gar nicht, sondern sie zieht $(x + k)^2$ mit hinzu. Auch für dieses Ende des Wachsens kann ihre Antwort nicht gelten, da nicht $(x + k)^2$ allein, sondern auch x^2 in Betracht gezogen ist. Die Antwort der Subtraction wird also eine Durchschnittsantwort sein. Statt zu sagen $7^2 - 6^2 = 13$ und $8^2 - 7^2 = 15$, sagt sie im Durchschnitt $8^2 - 6^2 = 28$. Jene Antworten $7^2 - 6^2 = 13$ und $8^2 - 7^2 = 15$ sind auch nur Durchschnittsantworten, denn zwischen diesen Potenzzahlen sind wieder Verschiedenheiten, die die Subtraction nicht bemerkt, weil sie mit einer Antwort sagen will, was sich eben nicht mit einer Antwort sagen lässt, so lange man zwei Stellen für die eine Antwort benutzt.

Sollte auch, wenn gar nicht von Potenzen die Rede ist, eine Subtraction immer nur ein Durchschnittsresultat geben?

Es ist

$$6 - 5 = 1$$

aber wer sagt mir, ob dieses Resultat nicht ebenso nur ein Durchschnitt ist, wie in unsrer bisherigen Betrachtung der Potenzzahlen wir fanden, dass $8^2 - 6^2 = 28$ nur ein Durchschnittsresultat war. Ist vielleicht

$$6 - 5 = 1$$

$$16 - 9 = 7$$

$$15 - 2 = 13 \text{ u. s. w.}$$

auch nur ein Durchschnittsresultat? Wir können und müssen bekennen, dass dies allerdings so ist. Allerdings giebt die gewöhnliche Subtraction immer nur Durchschnittsresultat.

tate. Auf die Frage, was liegt zwischen 9 und 2, giebt die Antwort 7 nur ein Durchschnittsresultat, das den Anfang mit dem Ende zusammenwirft und das keine Antwort auf die feinere Frage giebt, ob die Subtractivität nicht etwa eine andere in ihrem Anfang und eine andere am Ende ist. Die Antwort einer Subtraction lehrt das nicht. Aber was die Antwort einer Subtraction nicht lehrt, das lehren doch mehrere Subtractionen, die wir also hier, wie in den Potenzen, mit einander zu vergleichen Veranlassung haben. Wir finden, dass nicht bloß $6 - 5 = 1$, sondern dass auch

$$5 - 4 = 1$$

und ebenso, dass nicht bloß $16 - 9 = 7$, sondern auch

$$16 - 9 - 2 = 7 - 2,$$

dass innerhalb einer Subtraction dieselbe Gesetzlichkeit in der Mitte, wie am Anfang und Ende ist. Darin liegt der Beweis, dass die Antwort der gewöhnlichen Subtraction, obgleich sie zwischen Anfang und Ende nicht unterscheidet, doch hier, wo nur von Subtractionen ohne vorherige Multiplicationen die Rede ist, genügt, dass Anfang und Ende und Mitte sich gleich bleiben, da der Durchschnitt, den allerdings die Subtraction, ohne sich um das Genauere zu bekümmern, nur hinstellt, direct ohne weiteres überall gilt, constant ist. Die gewöhnliche Subtraction weiss von diesen Zweifeln und ihrer Lösung nichts, sie hat kein Bewusstsein über die feineren Fragen die sie übergeht, und übergehen darf, erst die Differenzialrechnung d. h. die Anwendung der Subtraction auf die Multiplication, denn weiter ist die Differenzialrechnung nichts, ruft jenen Gegensatz und damit jenes Bewusstsein ins Leben.

Die Subtraction benutzt also immer zwei Stellen, und macht deshalb einen Fehler, wenn sie Fragen zu behandeln hat, in welchen jede Stelle verschieden ist. Wir können

diesen Fehler, den wir nun einsehen, zurückrechnen. Betrachten wir das Verhältniss

$$\frac{2kx + k^2}{k}$$

nachdem es durch die Dividirung zu

$$2x + k$$

geworden ist, so sehen wir einen Ausdruck vor uns, der aus zwei Theilen besteht, von welchen der eine Theil ohne k erscheint. Dies brauchen wir nur zu übersetzen um gleich zu sehen, dass der eine Theil das Wachsen der Potenz des x , ehe es zum k hingeschritten ist, enthält. Wir wünschen dieses Wachsen der Potenz x^2 , ehe sie um irgend einen Theil von k sich vergrössert hatte, ehe sie $(x + k)^2$ geworden ist, gerade in dem Moment, wo diese Vergrösserung beginnt, wo das x zu dem k hinanzugehen anfängt; soll dieses Wachsen in dem Ausdruck

$$2x + k$$

irgendwo sich finden, so kann es und muss es in dem Theile und nur in dem Theile des Ausdrucks sich finden, wo dieser noch nicht zum k gekommen ist, wo er noch blos beim x und nur im x ist. Wir können also, ohne das k zu verkleinern, sagen: gelingt es durch Umformungen der niemals irrenden, also in jeder Umformung wahr bleibenden Subtraction, obgleich sie nur den Durchschnitt des Wachsens giebt, ihrem Resultat irgendwie die Form zu geben, dass sich unsrem Auge ein, mit andren k enthaltenden Gliedern, durch lose Addition, verbundenes, von k nicht erreichtes Glied darstellt, so haben wir in diesem einen Gliede das was wir suchen. Nicht durch Verkleinerung des k heilen wir den Schaden, sondern k soll und muss und darf ganz gross und eine Masse bleiben (denn wir wollen nicht in die Spitzfindigkeit einer Rechnung mit einem Nichts verfallen), also k oder Differenzial x muss beliebig gross und massenhaft bleiben, aber da wir es genau

nehmen müssen, mit dem Moment, in welchem wir das Wirken dieses massenhaft bleibenden k betrachten wollen, da wir den Effect, welchen es auf die Potenz genau im Anfang seines Wirkens, grade da, wo die Potenz x^2 ist, hat, in der Differenzialrechnung haben wollen, so sagt uns dies nicht der erste Ausdruck

$$2x + k$$

der das Wirken des massenhaften k auf die Potenz in der Mitte ihres Fortschreitens von $(x)^2$ zu $(x + k)^2$ giebt, aber indem wir diesen, irgend einen Durchschnitt gebenden Ausdruck

$$2x + k$$

nun nochmals betrachten und in ihm einen Theil der noch das k nicht erreicht hat finden, so sind wir gewiss, dass dieser Theil die Wirkung des beliebig massenhaft bleibenden k dort wo die Potenz noch x^2 ist sein muss. So wenig kann die Subtraction wirklich irren, dass ihre Antworten nur doppelt wahr, nemlich auch in ihren einzelnen Theilen wahr sind. Enthält der Ausdruck

$$2x + k$$

der eine Function von x und k ist, die Wirkung des k auf nicht bloß den Anfang der Potenz, so muss der Theil des Ausdrucks, der eine Function nur von x ist, die Wirkung des k dort sein, wo noch die Potenz nur Function von x , also noch $(x)^2$ und nicht $(x + k)^2$ ist. Dies verlangt die Algebra, wenn wir ihre Antworten auch theilweise zu deuten berechtigt sind. Die Algebra antwortet hier dem Fragenden mehr als er fragte. Die Differenzialrechnung fragte, wie wirkt auf den Anfang der Potenz das Wachsen ihrer Wurzel, die Algebra sich dieser Frage bemächtigend verändert sie in die Frage, wie wirkt auf die Potenz in einem Durchschnitt der Wirkung, dieses Wachsen der Wurzel? Dem Fragenden giebt darauf nun die Algebra mehr als er verlangte, wie sie es oft thut (z. B. wenn sie ein

Resultat mit doppeltem Zeichen ($\pm$) giebt, die beide eine Bedeutung haben, obgleich in der Aufgabe nur eine Bedeutung gefragt war), hier indem sie die Durchschnittswirkung

$$2x + k$$

nicht mit einem sondern mit zwei Worten giebt, von welchen das eine

$$2x$$

die Anfangswirkung allein, und beide Worte zusammen die Mittelwirkung messen und anzeigen.

Könnten wir uns darin irren; könnten wir zu unsrem Schlusse nicht berechtigt sein? Das befürchten wir nicht, indem wir erwägen, dass in der Mittelwirkung die Anfangswirkung irgendwie darin sein muss. Der algebraische Ausdruck könnte die Anfangswirkung verstecken, da die Algebra, die Subtraction, nicht zu antworten braucht, was sie nicht gefragt werden konnte, aber wahr bleibt die Algebra immer, auch wenn sie mehr thut, als man verlangt. Die Algebra könnte in ihrer Antwort über die Mittelwirkung die Anfangswirkung verstecken, die Trennung die in dem Binomen $x + k$ anfang mehr oder weniger verwischen. Sie könnte ihren Schrein verschliessen, aber sie thut dies nicht, sie lässt ihn so offen wie wir es wünschen können, und wir sehen innerhalb des Durchschnitts den Anfang ebenso liegen, wie wir ihn innerhalb des Binomens $x + k$ liegen gesehen. Dieses Binomen und das Resultat zu welchem die Rechnung es führt, sind gleichartig, deshalb dürfen wir von dem einen auf das andere schliessen, ohne eine Verwicklung der Kette des Schlusses erst entwickeln zu müssen. Mit andren Worten: in dem Ausdruck

$$2x + k$$

liegt der Anfang ebenso neben dem Ganzen, wie wir ihn beim Beginn der Rechnung in das Binomen

$$x + k$$

hineingelegt haben, wir brauchen also nur zuzugreifen, und den Anfang aus der Antwort

$$2x + k$$

ebenso wieder herauszunehmen. Allgemein: ein Ausdruck wie

$$2x + k$$

oder irgend ein ähnlicher

$$3x^2 + 3xk + k^2$$

der in seinem ganzen Umfang eine Function von x und von k ist, muss wohl in dem einen Theile, wo er noch ohne k nur Function von x ist, die Wirkung des beliebig grossen k auf die Potenz sein dort wo die Potenz noch x^2 eine blosser Function von x ist, und noch gar nicht eine Function von x und k noch gar nicht $(x + k)^2$ wurde, denn eine Wirkung des k auf die Potenz muss auch dieses k -lose Glied schon sein, da ja die Rechnung in der Form

$$(x + k)^2 - x^2$$

das was vor der Wirkung des k existirte (das x^2) schon hinweggenommen hatte, das übrig bleibende

$$2x + k$$

also alles eine Wirkung des k sein muss auch der Theil der noch reine Function von x ist, welche Function von x allein, wenn dazu eine logische Berechtigung nachgewiesen ist, auch eine Bedeutung hat.

Wir können die Subtraction, die so ihren Fehler gleich kühn wieder aufhebt, auch noch auf die folgende Weise den Fehler zurückrechnen lassen. Durch wiederholte Subtraction haben wir ihn entdeckt, durch Wiederholung wollen wir ihn messen. Denn Wiederholung ist überhaupt die wichtigste Erfahrungsweise und Methode der Arithmetik.

Nehmen wir wieder den einfachsten Fall, in welchem die Wurzel, die sich vergrössert, immer grade einen von den Werthen der sogenannten ganzen Zahlen haben soll

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

so ist die Reihe der Werthe, welche die Function erreicht, wenn diese die zweite Potenz ist

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$$

Wollen wir nun das Wachsen der Potenz einmal in der 5ten Stelle untersuchen, so muss die Subtraction diese (5te) Stelle von der 6ten Stelle abziehen, und wir wissen, dass das Resultat dann falsch ist, weil die Subtraction zwei Stellen benutzt, und deshalb für eine Stelle einen Fehler macht. Wir vergrössern diesen Fehler indem wir die 5te Stelle statt von der 6ten von der 7ten Stelle abziehen, wodurch eine Verdopplung des Fehlers entstehen wird, und von der 8ten, wodurch wieder eine Vergrösserung des Fehlers stattfinden wird, und vergleichen diese Fehler unter einander.

$$6^2 - 5^2 \text{ (also } 36 - 25) = 11 = 1 \times 11$$

$$7^2 - 5^2 \text{ (also } 49 - 25) = 24 = 2 \times 12$$

$$8^2 - 5^2 \text{ (also } 64 - 25) = 39 = 3 \times 13$$

$$9^2 - 5^2 \text{ (also } 81 - 25) = 56 = 4 \times 14$$

Hier sehen wir, wenn die Algebra Einen Fehler macht, von der 5 zur 6 messend, so ist das Resultat 11, wenn sie solcher Fehler zwei machte, von der 5 zur 7 messend, also wenn sie den Fehler doppelt machte, so ist das Resultat für jeden Fehler oder für jeden Schritt, 12, wenn sie ihn dreimal machte, so ist das Resultat 13, wenn sie ihn viermal machte 14, also wird der Schluss berechtigt wenn das Verhältniss der Fehler oder Schritte ihrer Grösse oder Menge nach ist

$$4, 3, 2, 1,$$

und der Resultate

$$14, 13, 12, 11,$$

so ist die fehlerlose Antwort wenn gar kein Schritt gemacht also nur eine Stelle betrachtet wird aus dem Gesetz dieser mehreren Zahlen zu entnehmen. Wird nemlich die Fehlerreihe Null also aus 4, 3, 2, 1,

$$4, 3, 2, 1, 0,$$

so müssen auch die Resultate dem in ihnen zu erkennen-
den Gesetze folgend, also hier statt 14, 13, 12, 11 nun als:

14, 13, 12, 11, 10
erscheinen und in der 10 die richtige Antwort geben.

Wäre im Beispiel statt der zweiten die dritte Potenz
in Frage, so ist

$$6^3 - 5^3 \text{ (also } 216 - 125) = 91 = 1 \times 91$$

$$7^3 - 5^3 \text{ (also } 343 - 125) = 218 = 2 \times 109$$

$$8^3 - 5^3 \text{ (also } 512 - 125) = 387 = 3 \times 129$$

$$9^3 - 5^3 \text{ (also } 729 - 125) = 604 = 4 \times 151$$

Die Zahlen 151, 129, 109, 91 zeigen durch die Subtraction
ihre Gesetzlichkeit als:

$$151, 129, 109, 91$$

$$22, 20, 18$$

und man sieht, dass die fehlerlose Antwort um 16 klei-
ner als 91 sein wird, indem wieder die Vergleichung von
drei, zwei und einem Fehler, diesen letzten zu fassen ge-
stattet.

Wir verlassen den einzelnen Fall, denn die Algebra ist
weniger deutlich bei nur einem Falle, wie in ihrer allge-
meinen Sprache. Ist allgemein das warum die Wurzel sich
vergrössert wieder k , so ergibt zuerst die gewöhnliche
Rechnung wie wir wissen

$$(x + k)^2 - x^2$$

was durch k zu dividiren ist, denn dividiren heisst verglei-
chen, und es soll jenes Wachsen der Potenz mit dem Wach-
sen der Wurzel welches k ist verglichen oder getheilt, ge-
messen, werden. Wir haben also

$$\frac{(x + k)^2 - x^2}{k}$$

als einen Ausdruck der einen Fehler enthält. Verdoppeln
wir den Fehler indem wir statt $(x + k)$ den Fall $(x + k + k)$
untersuchen und verdreifachen wir ihn dann u. s. w., un-
tersuchen wir also successiv $(x + 2k)$, $(x + 3k)$ $(x + 4k)$,

$(x + 5k)$ und theilen wir die Resultate durch 2, 3, 4, 5, indem wir die bloße Doppelheit und Vielfachheit wieder hinwegdividiren, oder indem wir die Resultate statt sie nur mit k zu vergleichen natürlich respective mit $2k$, $3k$, $4k$, $5k$ vergleichen also theilen, so haben wir unter Wiederholung des ersten Falles:

$$\frac{(x + k)^2 - x^2}{k} = \frac{(x^2) + 2kx + k^2 (-x^2)}{k} = 2x + k$$

$$\frac{(x + 2k)^2 - x^2}{2k} = \frac{(x^2) + 4kx + 4k^2 (-x^2)}{2k} = 2x + 2k$$

$$\frac{(x + 3k)^2 - x^2}{3k} = \frac{(x^2) + 6kx + 9k^2 (-x^2)}{3k} = 2x + 3k$$

$$\frac{(x + 4k)^2 - x^2}{4k} = \frac{(x^2) + 8kx + 16k^2 (-x^2)}{4k} = 2x + 4k$$

$$\frac{(x + 5k)^2 - x^2}{5k} = \frac{(x^2) + 10kx + 25k^2 (-x^2)}{5k} = 2x + 5k$$

u. s. w. Diese fünffache oder beliebig noch ferner fortgesetzt zu denkende Antwort der Algebra auf die Frage welche ihr die Differenzialrechnung stellte sagt: wenn gleich meine, der Algebra, erste Antwort wie alle meine Antworten, das nicht geben was die Frage der Differenzialrechnung verlangt, weil ich, die plumpere Algebra oder Subtraction zwei Stellen $(x + k)$ und (x) benutzen muss, während die Differenzialrechnung den Erfolg des Subtrahirens in einer einzigen Stelle allein haben will, so zeigt doch die Vergleichung der verschiedenen Antworten die ich gebe:

$$2x + k$$

$$2x + 2k$$

$$2x + 3k$$

$$2x + 4k$$

$$2x + 5k$$

mit algebraischer Nothwendigkeit: wenn bei fünffachem Fehler die Antwort $2x + 5k$, bei vier Fehlern $2x + 4k$, bei drei Fehlern $2x + 3k$, bei zwei Fehlern $2x + 2k$ ist,

und bei einem Fehler $2x + k$, so ist sie bei keinem Fehler $2x$. Fehlerlosigkeit und K -losigkeit treffen zusammen, nicht wie früher aus allgemeinen Gründen, sondern jetzt aus zwei besondern festeren Gründen, erstens weil das erste (k -lose) Glied ($2x$) überall sich gleich bleibt, wie sehr man auch die Fehler vergrößert und vermehrt, und zweitens, weil dasjenige in der Antwort, was k enthält (Function von k ist), sich ganz so vergrößert wie sich die Fehler vergrößern.

Also nicht eine Verkleinerung des k , sondern eine Vergrößerung seiner Menge verhilft uns zu der Antwort.

Es ist dies der Beweis, den die Subtraction, die zwei Stellen zu benutzen gezwungen ist, geben kann.

Wir glauben indess den Beweis tiefer fassen zu können, und wollen die bisherige Darstellungsart daher nur oberflächlich in alle Functionsformen, also allgemein in x^m und ax einführen.

Ist nicht die bisher betrachtete zweite Potenz, sondern allgemein irgend eine Potenz x^m in Frage, so ergibt dieselbe successive Behandlung von $(x + k)$, $(x + 2k)$, $(x + 3k)$ u. s. w. also die Behandlung von

$$(x + k)^m - x^m$$

$$(x + 2k)^m - x^m$$

$$(x + 3k)^m - x^m$$

getheilt oder gemessen respective durch $1k$, durch $2k$, durch $3k$ ebenso wie bisher fehlerhafte und verschiedene Resultate und deshalb aus ihrer Vergleichung das richtige Resultat oder

$$mx^{m-1}$$

denn sämtliche übrige Glieder der Entwicklung vergrößern sich bei der Verdopplung und Verdreifachung der Fehler, oder bei der Verdopplung und Verdreifachung des gemachten Schrittes so, dass ihre entsprechende Verminderung zur Null wird wenn statt successiv 1, 2, 3, Fehler

kein Fehler gemacht wird. Die andern wegfallenden Glieder sind alle immer von der Form für einen Fehler:

$$\frac{m \cdot (m-1) (m-2) \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} x^l k^n$$

für zwei Fehler

$$\frac{m (m-1) (m-2) \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} x^l (2k)^n$$

für drei Fehler

$$\frac{m (m-1) (m-2) \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} x^l (3k)^n$$

um deren übrigen Inhalt, also um m , l und n , man sich nun gar nicht zu bekümmern braucht, da immer der Factor k , $2k$, $3k$ darin ist, der mit der Fehlervergrößerung steigend und mit der Fehlerverminderung fallend im Fall der Fehlerlosigkeit nach seiner Gesetzlichkeit alle Glieder so wie die Fehler zur Null kommen, zur Null führt. Nur das Glied, in welchem kein k gleich anfangs war

mx^{m-1}
bleibt, ist also die Antwort der Algebra so wie auch der Differenzialrechnung, deren Formel

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$$

also durch die Fehler der Subtraction erkannt ist. Was noch den Fall

$$ax \left(\text{also } \frac{ax + k - ax}{k} \right)$$

betrifft, so folgt nach der bekannten Entwicklung

$$1 - (1-a) + \frac{k-1}{1 \cdot 2} (1-a)^2 - \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1-a)^3 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (1-a)^4 \dots$$

in welcher der Fehler oder das Schreiten k aus dem Exponenten in die Coefficienten hinein verlegt ist, ebenso, dass man den Fehler vergrößernd $2k$, $3k$, $4k$ u. s. w. also

eine Vergrößerung des k in die Formel setzen und auf die richtige Antwort schliessen, nicht aber, dass man k kleiner und unendlich klein machen kann. Wir verlassen diese Betrachtungen, denn wir haben uns nun mit Fehlern lange genug beschäftigt; sie messen sich unter einander, da man Alles messen kann, nur nichts wegwischen, selbst nicht einmal einen Fehler, sonst ertragen sie Alles und vergleichen sich und lernen sich kennen, aber das alles giebt nur negative Beweise, nur indirekte Rechtfertigungen. Wir nehmen für das Bisherige das Verdienst in Anspruch, die algebraischen Beweise der Differenzialrechnung von dem Uebel einer unendlich kleinen Grösse befreit zu haben. Wir wissen aber, dass wir immer noch nur eine apagogische Beweisart vor Augen haben, und glauben auf dem Wege der Subtraction, aus den in der Natur dieser Rechnungsart liegenden Gründen, nie einen andren Beweis finden zu können. Wir verzichten aber nicht auf die Hoffnung den positiven Beweis in dem Folgenden geben zu können, es sei uns deshalb erlaubt, ein wenig allgemein zu reden, und über einige wesentliche Begriffe der Algebra einige Worte zu sagen.

Zweites Capitel.

Die variable Grösse, die Gegensätze zwischen Aufgabe und Auflösung, die Gleichung oder Copula.

Die Mathematik, wie jede Wissenschaft, beginnt mit einzelnen Fällen. Sie steigert sich zu immer grösserer Abstraction. Die Zahl selbst ist auch nur eine Abstraction, ein einzelner Gesichtspunkt, der andre, ihn nicht interessirende Gesichtspunkte bei Seite setzt. Wenn ich z. B. Aepfel vor mir sehe, die ich gleich vertheilen will unter Knaben, die ich daneben im Gedanken habe, so zähle ich die Knaben, setze bei Seite, dass sie Knaben sind, und behalte nur bei, dass der Knaben „sieben“ sind, ich zähle ebenso die Aepfel und setze bei Seite, wenn ich 300 davon habe, dass dies Aepfel sind, und behalte auch hier nur die Zahl (300) im Auge, diese beiden 7 und 300 vergleiche ich nun miteinander, als wären sie ähnlich, obgleich die einen Knaben und die andren Aepfel sind, 7 Knaben in 300 Aepfel zu theilen giebt für die Division die überflüssigen störenden Unterschiede der vielen Eigenschaften und Zwecke, durch welche sich die einen von den andern unterscheiden, und die ihre Vergleichung möglich machen, nach der Division kann ich diese Unterschiede und Zwecke

wieder in ihr Recht treten lassen, und muss ich dies thun, denn Zahlen existiren gar nicht, es giebt keine Sieben und keine Eins in der ganzen Welt, sondern alles was eine Eins oder Sieben ist, ist noch vieles andre daneben, die Zahl ist also eine Abstraction, ein blosser Gesichtspunkt, von welchem ich das was concret ist, ansehe. Auch Zeit und Raum (die Geometrie) sind nur Gesichtspunkte, aber weniger abstract als die Zahl, da die Zahl jede Gesetzlichkeit, auch die räumliche und zeitliche in sich schliesst, indem sie, und nur sie, die Gesetzlichkeit selbst, die blosse Gesetzlichkeit, die reine und letzte Abstraction ist, und die Geometrie eine angewandte Algebra fast nicht weniger als die Akustik genannt werden könnte. Aber obgleich die Zahl alle Eigenschaften der Gegenstände in der Welt bei Seite setzt, um sie nur als Einse in Betracht zu ziehen, also die Zahl schon gleichsam nichts mehr als blosse Gesetzlichkeit ohne das Beispiel, in welchem sie sich bethätigt, ist, so genügt ihr diese hohe Abstraction doch noch nicht, sondern sie degradirt auch sich zum Beispiel, und setzt sich selbst bei Seite, indem sie in der Algebra den Buchstaben einführt. Anstatt 3 mal 4 = 12, anstatt irgend einer einzelnen Multiplication, schreibt und denkt man jetzt a mal $b = c$; alle Fälle mit einem Male erfassend. Der Buchstabe bedeutet nicht eine Zahl, sondern alle Zahlen, ist die Zahl überhaupt. Die Buchstabenrechnung verdrängt aber keineswegs die Zahl. Das Newtonsche Binomialtheorem (die Multiplication einer mehrgliedrigen Grösse mit sich selbst) ergiebt z. B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, was aber nicht $a^m + kab + b^n$ gedacht werden darf, weil dann die Antwort unbestimmt sein würde, während sie bestimmt sein soll, und durch die den Buchstaben a und b hinzugefügten Zahlen $a^2 + 2ab + b^2$ die wesentliche Bestimmtheit, um die es grade zu thun ist, erhält. In der allgemeinsten Form bleibt dies noch immer wahr.

da in der Aufgabe $(a + b)^n$ zwar keine Zahl sich findet, aber in der Antwort

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

gleich die Zahlen sich wieder einstellen und auch dort, wo keine Zahl sich findet, die Zahl Eins von dem Gedanken hinzugefügt wird. Der Gegensatz zwischen der beliebigen Zahl d. h. dem Buchstaben, und der nicht beliebigen, durch die betrachtete Gesetzlichkeit veranlassten Zahl ist das, worauf es ankommt. Der Gedanke der Buchstabenrechnung ist also: Erschaffung eines Gegensatzes des beliebigen (allgemeinen) Zahlgedankens, der als Buchstabe sich setzt, und eines nicht beliebigen Zahlgedankens, der als Zahl sich daneben einstellt, damit durch den Gegensatz die Aufmerksamkeit sich concentrirte auf die durch die Entwicklung veranlassten nicht beliebigen Zahlen, bei Seite setzend die Bestimmtheit der Zahl dort, wo sie in Betracht zu ziehen in irgend einem Moment nicht nöthig ist. Es wird bald hier bald dort abstrahirt, um ein andres Bewusstsein anderswo desto mehr zu erwecken. Nach der Erfindung der Buchstabenrechnung kann die Gesetzlichkeit, wenn sie einen besondern Gesichtspunkt ergreifen will, andre bei Seite legen, auf die Zahl dort, wo diese erscheint, nur um so mehr in concentrirter Weise die Aufmerksamkeit lenkend. Divide et impera ist jetzt ihr Wahlspruch geworden. Dieses successive bei Seite setzen wird aber noch weiter fortgeführt.

Aufgabe und Auflösung sind der Gegensatz, an welchem zuerst die Gesetzlichkeit der Zahlen sich zerreibt oder sich erprobt. Die Aufgabe nimmt man als Frage und die Auflösung als Antwort. In Wahrheit ist jede Auf-

gabe auch schon gelöst, z. B. drei mal vier ist schon dasselbe was zwölf ist. Dennoch nennt man drei mal vier eine Aufgabe und zwölf die Lösung. Man vergisst, dass die Zahlengesetzlichkeit überall ist, dass sie eben so sehr in drei mal vier wie in der Zwölf liegt, wo sie ja zwölf mal Eins ist, dennoch nennt man nur jene Form die Aufgabe und diese Form die Lösung, weil diese die einfachere Form ist. Eine Aufgabe lösen heisst also irgend eine verwickelte Zahlengesetzlichkeit entwickeln, also eine Zahlenform, die künstlicher oder unverständlicher ist, in eine andere Zahlenform, die einfacher ist, umformen, entwickeln. In der höheren Arithmetik gebraucht man daher vorzugsweise oder lieber das allgemeinere Wort Entwicklung, wenn man das was dort in irgend einem Augenblick der Zweck ist, bezeichnen will, und vermeidet das weniger allgemeine Wort Auflösung, dessen specielle Bedeutung an die Zwecke ausserhalb der Mathematik erinnert, die zu der Rechnung Veranlassung gegeben haben, worüber das Bewusstsein dort noch nicht ganz verschwunden ist. Wenn aber die Mathematik sich selbst genügt, und rein nur bei sich selbst bleibt, so muss sie eben so gut erkennen, dass

$12 = 3 \text{ mal } 4$

als dass

$3 \text{ mal } 4 = 12$

d. h. die einfachere Form muss ihr eben so gut den Platz der Aufgabe und die verwickeltere den der Lösung einnehmen können, als umgekehrt, und sie bedient sich daher des allgemeinen Wortes Entwicklung, in welchem ein Doppelsinn liegt, der ihr auch willkommen ist. Entwickeln heisst nemlich sowohl vom Einfachen zum Complicirten fortgehen, wie umgekehrt Complicirtes vereinfachen. Die Silbe „ent“ ist mit der tiefen Zweideutigkeit des Begriffs Zweck verwandt, enthält Synthese und Analyse in sich, gleichsam direct beweisend, dass diese berühmten Antithesen identisch

sind. Nur zuerst bethätigt sich und begnügt sich die Gesetzlichkeit der Zahl an dem wenig abstracten Gegensatz der Aufgabe einerseits und ihrer Lösung andererseits. Die Aufgabe wird bald x genannt und abstrahirt dadurch von sich selbst, indem sie sich auch als ein gewöhnlicher Buchstabe setzt. Es wird dadurch ausgesprochen, es sei der Umstand, dass sie Aufgabe und unbekannt ist und in den Umformungen, die mit ihr vorgehen, erst bekannt wird, nur eine Nebeneigenschaft. Selbst die einfachsten Fälle, wo die „Aufgabe“ darin besteht, eine vierte Proportionalzahl zu finden, worüber die sogenannte regula de tri sich verbreitet, fassen sich in ihren Anwendungen

$$3 : 15 = 4 : x$$

gleich so, als wäre keine Aufgabe und keine Lösung, sondern nur die Gesetzlichkeit in Frage, und wegen solcher Gesetzlichkeit, nemlich, weil die Mittelglieder in solcher geometrischen Proportion mit einander multiplicirt so gross wie die (multiplicirten) äusseren sind, so entwickelt sich dieses Beispiel zu

$$4 \text{ mal } 15 = 3 \text{ mal } x$$

und wird dann durch eine nochmalige Umformung

$$\frac{3 \text{ mal } 15}{\text{verkleinert durch } 4} = x$$

Das Wesentliche ist hier, dass das numerisch unbekannte „Zeichen“ x , oder die unbekannte Sache res wie ein gewöhnlicher Theil der Rechnung behandelt wird. Es wird gleich gefühlt, dass hier eine wichtige Verallgemeinerung des Gedankens sich vorbereitet. Die „unbekannte“ Grösse, oder die Aufgabe, die sich ganz gleich den andren Grössen nur als ein Buchstabe hinstellt, geht nemlich obgleich unbekannt mit in die Rechnung hinein, sich untertauchend in die verwickeltsten Bewegungen der Gesetzlichkeit, einmal als x^m , ein

andermal als $\sqrt{x}$ erscheinend, dort wo die Wellen am höchsten gehen, kaum mehr erkannt vom Bewusstsein als etwas Besondres, sondern nur als Buchstabe mitspielend in dem Spiel der Gesetzlichkeit, bis es dem Bewusstsein hier oder dort einmal beliebt, sich wieder an ihn besonders zu erinnern, ihn auszusondern, ihn zu fixiren, die Aufmerksamkeit auf ihn zu wenden. In der That verdient er auch nicht viel Aufmerksamkeit, und er verliert sie fast schon ganz, nachdem das Wort Entwicklung die Worte Aufgabe und Auflösung verdrängt. Die Abstraction setzt es bei Seite, dass ein Glied des organisirten Ganzen die Frage, oder das vorher Bekannte, gewöhnlich sein werden, das Ganze will nur sich selbst, seine Gesetzlichkeit, anschauen, ohne irgendwo einen Anfang oder ein Ende zu supponiren, d. h. der Gegensatz zwischen Synthese und Analyse soll bei Seite gelassen werden; das Ganze, in welchem, je nachdem es von einer Seite sich beschaut, Synthese und auch Analyse zusammen sind, gestattet nicht, dass ein Theil den Vorzug oder Nachtheil des Bekannten gegen den andern als unbekannt behalte. Das Bekannte ist am Unbekannten wie dieses an jenem zu messen, damit die Aufmerksamkeit bald hierhin bald dorthin, wo in dem Augenblick das Gesetz sich besonders bethätigt, gerichtet werden könne, wobei das Bewusstsein auf den Gegensatz der bekannten und unbekannten Grösse immer von Zeit zu Zeit zurückblicken kann, wie man denn auch wohl vom Buchstaben zur Zahl zurückfällt. So wird es also aus dem Bewusstsein absichtlich fast verwischt, dass dasjenige, was wie alles Andre in Verwicklungen hineingeführt wird, unbekannt ist, da das Ganze nur sich betrachtet.

Es ist noch ein neuer, der allerwichtigste Gedanke zu erfinden, und seine Erfindung schliesst sich zunächst an einen besondern Fall der Aufgaben, nemlich an den der sogenannten Diophantischen Aufgaben an.

Es ist natürlich, dass wenn die Frage, man möchte sagen nicht alle Thüren der Gesetzlichkeit bis auf eine verschlossen hat, die Antwort ihren Ausweg aus mehreren Thüren nehmen, d. h. die Antwort etwa eine doppelte, dreifache, ja eine unendlichfache sein kann. Frage ich, welche zwei Zahlen geben zu einander addirt die Zahl Zwanzig, und subtrahirt die Zahl Sechs, so ist die Frage bestimmt, die Antwort daher nur eine, nemlich es sind diese Zahlen 7 und 13, da sieben und dreizehn addirt zwanzig, und subtrahirt sieben geben, frage ich dagegen, welche zwei Zahlen geben zu einander addirt die Zahl Zwanzig, aber ohne dann eine nähere Bestimmung, z. B. nicht die bisherige über ihre Subtrahirung, in der Frage hinzuzufügen, so ist die Aufgabe unbestimmt, es sind also der Antworten mehrere, da nicht blos 13 und 7, sondern auch 14 und 6; 15 und 5; 19 und 1; zusammen zwanzig sind. Diese unbestimmte, Diophantische Aufgabe hat grade zehn Antworten $1 + 19$; $2 + 18$; u. s. w. bis $10 + 10$. Es sei denn, dass man die Aufgabe so denkt, dass sie nicht ganze Zahlen, sondern überhaupt nur Zahlgedanken als Antwort verlangte, in welchem Falle Brüche, Irrationalzahlen u. s. w. mit im Spiel wären, und schon allein, wenn für Brüche die Thüre durch die Frage nicht verschlossen wird, der Antworten eine illimitirte Menge ist, da zwischen jeden 2 Zahlen, z. B. zwischen $1 + 19$; die Fälle $\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} + 19\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4} + 19\frac{3}{4}$ u. s. w. ohne Ende liegen, die alle auch $= 20$ sind. Durch diese Diophantischen Aufgaben wird es also, da man die Unbekannte auch hier x nennt, klar, dass x bisweilen nur eine einzelne, eine bestimmte Zahl, bisweilen aber mehrere, oder eine Unendlichkeit von Zahlen, sein kann, und dass dieses x doch wie eine Zahl, wie ein Buchstabe, in die Rechnung hineingehen, und in die hohen Wellen der Gesetzlichkeit sich untertauchen, und unbeschädigt am Ende in seiner Vielheit oder Allheit wieder her-

auskommen kann. In der Differenzialrechnung beachtet man sogar nur diese (eine Allheit bedeutenden) Zahlen, da das Differenzial einer bloß einzelnen Zahl nicht existirt, Null ist. Dies ist der neue Gegensatz, wodurch das, was in die Rechnung eingeht, nur dreierlei ist, entweder nur eine einzelne Zahl, oder jede Zahl, also allgemein die Zahl, die aber doch in der Rechnung immer dieselbe nicht variirende Zahl bedeutet, die den Buchstaben zum Zeichen hat, oder drittens die Zahl in Diophantischem Sinne, d. h. die, gleichzeitig und während der Rechnung, mehrere, ja vielleicht alle Zahlen, bedeutet. Hier tritt der allgemeinste Begriff auf, nemlich einer Variablen, also einer nicht bestimmten und auch nicht einmal mehr constanten Zahl, für welche letzteren nun der Buchstabe x , und die übrigen letzten Buchstaben des Alphabets, in der Regel gebraucht werden. Der Buchstabe x und die übrigen in diesem Sinne gebrauchten Buchstaben und Zeichen des Alphabets haben nun erst vollständig ihre erste untergeordnete Bedeutung der Frage im Gegensatz gegen eine Aufgabe bei Seite gelassen. Sie haben in dieser höheren Betrachtung der Mathematik die Bedeutung von variablen Zahlen bekommen im Gegensatz gegen die andren Buchstaben, die constante nur beliebige Zahlen sind, und im Gegensatz gegen die einzelnen Zahlen, die nicht beliebig sind. Diese Entdeckung ist sehr wichtig, denn nicht bloß giebt es ausnahmsweise Fälle, die man Diophantische Aufgaben nennt, wo Zahlen und allgemein ihre Zeichen variable Zahlen sein können, sondern in allen Fällen, in jedem mathematischen Ausspruch

$$a : c = b : d$$

oder

$$cb = ad$$

oder

$$\frac{cb}{d} = a$$

können beliebige zwei Grössen variabel gedacht werden, z. B.

$$a : y = b : x$$

als wären diese und also alle Fälle der Mathematik Diophantisch, nur wohl zu bemerken Diophantisch auf beiden Seiten der Gleichung. Der Ausdruck

$$ax = y$$

heisst jetzt: man denke irgend eine constante Zahl a , und eine andre variable, d. h. also, welche letztere alle möglichen Grössen zu gleicher Zeit in dieser einen Aufgabe bedeutet, oder mit andren Worten, welche nicht bloss eine Grösse, sondern welche die Grösse ist, und denke diese allgemeine Grösse in allen Momenten, die sie haben kann; mit der constanten Zahl a multiplicirt, so entsteht wieder eine variable bloss allgemeine Grösse y , und die Gesetzlichkeit, die man anschaut, wird so ganz abstract und allgemein vor dem Auge schweben. Aus

$$a \times x = y$$

folgt

$$\frac{y}{a} = x$$

man sieht also, dass die Constante zum Divisor wird, wenn sie zu der zweiten Variablen, die das Resultat der Multiplicirung ist, hinzutritt, u. s. w. u. s. w.; denn in diesen einfachsten Fällen, für welche die Variable nie erfunden worden wäre, lehrt sie allerdings nicht viel, was nicht auch der Buchstabe, oder schon die Zahl ohne Buchstaben, anschaulich macht, aber wir brauchen nicht erst zu versichern, dass in den höheren Rechnungen der Gegensatz der variablen gegen die constante Grösse von der grössten Wichtigkeit wird. Durch den Gedanken der variablen Grösse kommt Bewegung in die todte Gleichung. Nehmen wir ir-

gend einen beliebigen Ausdruck, z. B. das allgemein gesetzte letzte Glied einer geometrischen Progression, welches veranschaulicht wird durch

$$f = aen-1$$

wo f das letzte Glied, a das erste Glied, n die Anzahl der Glieder und e den Exponenten, d. h. diejenige Zahl bezeichnet, die multiplicirend aus dem einen Glied das folgende bildet. Dies ist eine stehende, man könnte sagen todte Gleichung, aber indem man je zwei von den Grössen, z. B. f und e , variabel und nur die anderen constant denkt, kommt Leben in die Gleichung, wir sehen gleichsam, wie das allgemein gesetzte oder letzte Glied (f) sich ändert, wenn a , das erste Glied, dasselbe bleibt, auch n , die Anzahl der Glieder, dieselbe bleibt, aber e , der Exponent, also nur dieser eine von den Erzeugern der Gesetzlichkeit, sich ändert, oder wenn f und a die variablen sind, wie f ein andres wird, wenn nur das erste Glied verändert wird, alles Andre aber gleich also constant bleibt; oder wenn f und n variabel, wie f dann wieder anders sich ändert, wenn hier die Anzahl der Glieder in Bewegung kommt, die übrigen Erzeuger der Gesetzlichkeit aber constant, todt, bleiben. Eigentlich sehen wir dies alles erst in der Differentialrechnung, die die Subtractivität der bewegten Theile vergleicht mit der Subtractivität des Ganzen, und dadurch Ordnung in die Bewegung bringt. Haben wir nun dreierlei erfasst, zuerst einzelne Zahlen, dann allgemein jede stehende, constante, Zahl im Buchstaben, und drittens die variable Zahl, den Buchstaben in Bewegung, und kommt also durch die Variable Bewegung in die Gleichung, so ist doch diese Bewegung nur in einigen Theilen, andre sind todt, bleiben unbewegt, sind stantes, constant. So ist es für uns Menschen nothwendig, da unser Wissen Stückwerk ist, wäre Alles zu gleicher Zeit in Bewegung, so wür-

den uns die Augen vergehen, und wir würden nichts recht sehen, in Wahrheit ist jedoch in der Gleichung oder Gesetzlichkeit

$$f = ae^{n-1}$$

Alles gleichzeitig in Bewegung (wenn wir, wie wir müssen, diese Gesetzlichkeit in ihrer ganzen Wirkung, Function, betrachten und so allgemein wie möglich über sie denken wollen), jede Bewegung des einen ihrer Glieder regelt die Bewegung der andren, und wird gleichzeitig von ihnen, und sie alle von dem Ganzen, geregelt; wie indess der Architect in einem Gewölbe nur einen einzelnen Schnitt macht, und die Curve dieses Schnittes betrachtet, und dann, um das ganze Gewölbe zu studiren, einen zweiten und dritten, aber immer einzelnen, Schnitt, und er jede Curve immer einzeln betrachtet, so auch macht die menschliche Erkenntniss in der Gesetzlichkeit

$$f = ae^{n-1}$$

einzelne successive Schnitte, bald hier bald dort sie, die in Wahrheit überall in Bewegung zu denken ist, irgendwo anhaltend, sie nur nach einer einzelnen Richtung hin verschiebend, bewegend, sie einmal betrachtend als variabel nur in f und e , also als

$$x = ay^{n-1}$$

ein andermal als

$$x = ye^{n-1}$$

ein drittes Mal als

$$x = ae^y$$

u. s. w. u. s. w. Denn Alles mit einem Male in Bewegung zu denken, und seine Wechselwirkung mit einem Blicke zu sehen

$$y = xz^{u-v}$$

wo fünf Variable gleichzeitig in der Rechnung sind, das ist allzuschwer, und fördert unsre menschliche Kenntniss nicht eher, als bis uns vorher das Einzelne als Einzelnes deutlich geworden ist. Aber jeder einzelne Fall ist immer nur ein Beispiel. In jeder Ordnung, in jeder Gesetzlichkeit sind alle ihre einzelnen Bewegungen enthalten.

Indem die Mathematik zu dem Begriff der Variablen aufgestiegen ist, und die Bedeutung der zuerst unantastbar scheinenden Begriffe Zahl, Aufgabe, Auflösung, Entwicklung sich verändert haben, hauptsächlich dadurch, dass der einzelne Fall immer mehr bei Seite gesetzt wurde, bekommt dadurch der Ausdruck Gleichung auch eine höhere Bedeutung. In dem mathematischen Satz erscheint das Gleichheitszeichen gewöhnlich ohne besondere Erklärung; es ist dasselbe, was in einem Satzsatz die copula heisst:

$$6 \times 7 = 42$$

heisst so viel als:

6 mal 7 ist 42.

Man unterscheidet im Satzsatz Subject und Praedicat, wobei das Subject wie die Aufgabe, und das Praedicat wie die Lösung der Aufgabe, wie eine Antwort auf die Frage, was das Subject sei, erscheint. Man hat schon bemerkt, dass in den höchsten Sätzen der Philosophie, in denen, die von den Eigenschaften Gottes handeln, z. B. in dem Satz: Gott ist allweise, das Subject noch ohne Inhalt zu denken ist, da die ganze Erkenntniss hier in dem Praedicat liegt, und derjenige, der von Gott schon vorher einen bestimmten Gedanken hat, diesen vergessen müsse, wenn er die Untersuchung beginnt. Hegel, der diese Bemerkung macht, setzt hinzu, dass er in seiner Logik überall, bei der Definition der Begriffe, z. B. des Begriffs der Quantität, Qualität, Relation etc., diese als die Eigenschaften Gottes, des Absoluten, hätte darstellen, und sie also immer als Praedicate eines

Subjectes eigentlich hätte behandeln müssen, dass aber dies auch wiederum nicht nöthig war, da, wenn gleich die eine Frage immer nur die sei, was ist das Absolute, welche Eigenschaften hat Gott, welche Eigenschaften Gottes sind die Naturwesen, sind wir selbst, doch jenes eine Subject, eben weil es nur durch seine Praedicate erkannt werde, ganz aus der Frage wegbleiben könne, und müsse, da alles Interesse aus dem Subject in die Praedicate hineingehe. Man sieht, dass diese in der Quantitätswissenschaft richtige Ansicht auch in die Logik hineingedrungen ist. Aber nur die Algebra beseitigt in Wahrheit völlig den Gegensatz der Frage gegen die Antwort oder des Subjectes gegen das Praedicat, so dass zuletzt jede Gleichung auf Null reduzirt wird. Diese Veränderung ist die Folge eines consequenten durchgeführten Gedankens. Man bemerkt in der Algebra, dass in der Gleichung das Praedicat zum Subject werden kann:

$$3 \text{ mal } 4 \text{ ist } 12$$

$$12 = 3 \times 4$$

und dass dieser Wechsel nicht bloß von dem ganzen Praedicat gilt, sondern dass ein Theil desselben aus dem Praedicat heraus genommen werden kann, um in das Subject hineingelegt zu werden. Aus dem Satze

$$3 \times 7 = 21 \text{ oder}$$

$$3 \text{ mal } 7 \text{ ist } 21$$

folgt der Satz

$$3 = 21 : 7$$

$$3 \text{ ist } 21 \text{ getheilt durch } 7,$$

die Copula wird hier mehr nach vorne hingerückt, die Zahl 3 allein als Aufgabe, als Subject des Satzes, gefasst, und die andren beiden Zahlen als das Praedicat, während vorher die Aufgabe zwei Zahlen umfasste, und die Lösung nur eine Zahl. Die Copula d. h. das Gleichheitszeichen ist verschoben worden. Auch in der Logik wird, wenn auch

nicht augenscheinlich in nur einem Satze, doch aber in dem, aus drei einzelnen Sätzen gebildeten, Schluss eine Verschiebung der Begriffe aus den Praedicaten in die Subjecte hinein, und umgekehrt, bekanntlich oft vorgenommen, z. B. ein bejahender Satz in einen verneinenden umgewandelt, das Praedicat als Subject gedacht, eine Praemisse in die Stelle des Schlusssatzes gesetzt, nach Regeln, die hier wie dort Conversionsregeln genannt werden sollten. Dies alles heisst: das Gleichheitszeichen, die Copula, wird verschoben. Noch deutlicher wird diese Analogie und die Anwendung auf die Algebra, wenn wir einen längeren mathematischen Satz wählen, z. B.

$$7 + 3 \times 4 - 8 = 11$$

hier kann das Gleichheitszeichen, die Copula, mehrfach verschoben werden, nach Regeln, die auch in der Mathematik Conversionsregeln sind, da sie hier, wie in der Logik Aenderungen hervorbringen, welche nur die Folge der Versetzung der Copula, oder der Veränderung des Subjects, oder der Frage sind. Wir erkennen immer jenen ersten Satz wieder in den nur verschobnen Fragen, oder Ausdrücken:

$$7 + 3 \times 4 = 11 + 8$$

oder

$$7 = 11 + 8 - 3 \times 4$$

Endlich verschieben wir das Gleichheitszeichen ganz aus dem Satz heraus, und sagen:

$$7 + 3 \times 4 - 8 - 11 = \text{Null.}$$

Nun ist die ganze Antwort in das Praedicat gelegt, und das Subject des Satzes hat gar keine Bedeutung mehr, ist Null, ist Nichts, was, wenn es in die Logik hineingetragen werden könnte, allerdings heissen würde, dass in der höchsten Frage, was ist Gott, die Antwort auch ganz nur in die Praedicate hineinzulegen sei. Das ist die Reducirung

der Gleichung auf Null, oder die Erfahrung, die sie gemacht hat, dass es willkürlich sei, einen Gegensatz zwischen Subject und Praedicat in einem Satze anzunehmen, und dass das Spiel der Gesetzlichkeit an beiden Seiten des Gleichheitszeichens Gegenstand gleicher Aufmerksamkeit sein muss. Die Theilung der Aufmerksamkeit bleibt wohl bisweilen wünschenswerth, und dann wird sich das Gleichheitszeichen auch wieder in den Satz hineinlegen, in der Regel aber ist in den höchsten Betrachtungen diese Theilung nicht mehr zulässig.

Die Mathematik giebt hier also unserm Denken die Lehre, dass wir nur deshalb, weil unser menschliches Wissen Stückwerk ist, in der Regel ein Subject, gleichsam etwas schon Bekanntes, supponiren müssen, wenn wir zu einer Erkenntniss uns anschicken, dass aber in Wahrheit die Subjecte ebenso unbekannt sind als die Praedicate, und sich an diesen, wie diese sich an ihnen messen und vergleichen. In dem schon betrachteten Ausdruck

$$f = ae^{n-1}$$

steht das Gleichheitszeichen, einerlei ob man die Gleichung als eine todte oder als eine bewegte ansieht, nun bald hier bald da, die Ausdrücke:

$$a = \frac{f}{e^{n-1}}$$

$$e^{n-1} = \frac{f}{a}$$

u. s. w.

sind nur andre Gesichtspunkte dieser Gesetzlichkeit, die sich gleichsam in allen ihren Gesichtspunkten zugleich betrachtet, wenn sie auf Null gebracht ist,

$$ae^{n-1} - f = 0$$

was zu lesen $ae^{n-1} - f$ ist eine Ordnung. Hier nemlich bedeutet das Gleichheitszeichen, die Copula, nicht mehr Grösse. Schon in den Fällen von Reihen-Entwicklungen

hat das Gleichheitszeichen mit dem Begriff gross eigentlich nichts mehr zu thun, und in der Differenzialrechnung ist namentlich der Begriff der gleichen Grösse ebenfalls das nicht, worauf es ankommt. Dieser Begriff der gleichen Grösse ist der untergeordnete, der dort zu Hause ist, wo man sich noch mit dem Beispiel als dem einzelnen Fall befasst. Wenn aber die Mathematik die ganze Gesetzlichkeit betrachtet, so ist es nicht Grösse, sondern die Ordnung, auf die es ankommt. Das Höhere, Abstractere, umfasst zwar immer das Niedere, das Gesetz den einzelnen Fall, das Gleichheitszeichen kann daher sich immer wieder seiner ersten naiven Bedeutung erinnern, dann fallen die andren Zeichen, die Buchstaben, wohl auch von ihrer höheren allgemeineren Bedeutung zurück in eine niedere Bedeutung, was sie auch immer können, der Buchstabe kann immer als Zahl, die variable Grösse als Constante gefasst werden, der Gedanke kann hin und hergehen von der einen zu der andren Bedeutung. In der höchsten Abstraction der Betrachtung ist das Gleichheitszeichen aber nur die Copula, oder es ist immer die Copula, die nur in verschiedenen Sätzen Verschiedenes, manchmal ein Abstractes, manchmal ein Concreteres, bedeutet, wie überhaupt das ganze Geheimniss der Bedeutung der Copula wohl grade darin liegt, dass sie nichts Besondres bedeutet, dass sie jeder Bedeutung, die Subject und Praedicat wünschen können, sich fügt, das sie nur abstractes Verbindungszeichen, Zeichen der Ganzheit, des Zusammenhangs man könnte sagen, des Absoluten, Gottes sein soll, einer Ganzheit, die in Praedicat und Subject, in den beiden Gliedern der Gleichung, von zwei Gesichtspunkten aus betrachtet wird. Durch Reducirung auf Null wird angedeutet, dass das Ganze nicht von zwei Gesichtspunkten, sondern als in sich geschlossenes Ganzes, System, Ordnung, hier in Betracht gezogen wird, wobei es sichtbar gar nicht auf seine

Grösse ankommt. Man theilt daher und multiplicirt eine Gleichung auf Null beliebig, was nicht heisst, dass mehrmals Nichts Nichts ist, sondern dass das System dasselbe bleibt, wie gross oder klein man es nehme, dass die Grösse unbedeutend ist.

Im Allgemeinen sehen wir wie die Lehren der Algebra zum Schluss uns von dem einzelnen Fall entfernen, und uns in immer höhere Regionen der Abstraction erheben. Wir haben dies noch in einem letzten Fall zu zeigen, der direct zu der Differenzialrechnung hinführt.

Drittes Capitel.

Die zwei Rechnungsarten und Reihen, oder Ordnungen, die arithmetische, und geometrische.

Es tritt schon früh in der Zahlengesetzlichkeit ein bekannter Gegensatz auf, der wesentlichste in der ganzen Algebra, der des Addirens und des Multiplicirens. Die Tragweite dieses ersten Gegensatzes ist noch grösser als man oft glaubt, was am leichtesten in die Augen springt, wenn man bedenkt, dass Potenziren eine Art des Multiplicirens, und sogar wie wir gleich sehen werden, nicht eine Unterart, sondern die eigentliche Art des Multiplicirens ist. Hieraus folgt, dass diese beiden Rechnungsarten, Addiren und Multipliciren in ihrem Gegensatz nicht blos wichtig sind, sondern dass die ganze Algebra nur daraus besteht. Denn da es nur sieben Rechnungen giebt, Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Wurzelziehen und Logarithmiren, und das Subtrahiren nichts als die Umkehrung des Addirens ist, wie zu dem Multipliciren die Umkehrungen, Logarithmiren, Radiziren und Dividiren, gehören, so giebt es überhaupt in der ganzen Mathematik keine andre, als jene zwei Rechnungsarten, die subtractive (Addiren und Subtrahiren) und die multiplicative (Multiplici-

ren mit Potenziren und ihre Umkehrungen). Beide Rechnungen beginnen, wie alles in der Mathematik, in einzelnen Fällen, verallgemeinern sich aber dann dem Gange der Mathematik entsprechend zu Regeln, zu Reihen, Ordnungen, und erreichen so die höchsten Regionen der Abstraction. Der Uebergang von dem einzelnen Fall zu der allgemeinsten Ordnung geschieht durch die Proportion. Ein Additionsfall

$$12 + 2 = 14$$

oder als Subtraction

$$14 - 12 = 2$$

findet sich auch in einem andern Fall, da

$$14 - 12 = 12 - 10.$$

So entsteht aus der Addition die arithmetische Proportion. Aber derselbe Fall findet sich auch noch in einem dritten und mehreren Fällen

$$14 - 12 = 12 - 10 = 10 - 8 = 8 - 6 = 6 - 4 = 4 - 2 \text{ etc.}$$

so entsteht aus der arithmetischen Proportion die arithmetische Progression

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

Der eine Fall sieht ein, dass er nicht wichtig ist, dass in ihm etwas ist, was wichtiger ist, als dieser Fall. Die Addition oder Subtraction erkennt ihr Gesetz, ihr Werden, welches wichtiger ist, als dessen einmalige Anwendung, als ihr Sein. Jeder einzelne beliebige Fall erzeugt jetzt in seiner Verallgemeinerung durch den in ihm liegenden Unterschied eine beliebige Menge von Fällen. Diese heissen seine Reihe, seine Ordnung, seine Progression. Der Anfang und der Unterschied der Reihe kommen dabei als Erzeuger der Reihe in Betracht. Nennen wir a den An-

fang, und d den Unterschied, so fassen sich alle diese Reihen als

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

Uebersetzen wir, was eine arithmetische Reihe ist, so ist sie, wie wir sehen, also Ordnung, die in die Vielheit gebracht wird durch einen Anfang a , und durch wiederholtes Hinzusetzen eines Unterschiedes d . Auch der Anfang a kann dem Zusatz oder dem Unterschied d gleich sein, also $a = d$, in welchem Falle eine Unterart der arithmetischen Reihen entsteht, in welchen kein a als Anfang von dem d zu unterscheiden ist, in welchen das erste Glied d , das zweite $d + d$, u. s. w., ist, welche Reihen also sämmtlich in dem Ausdruck

$$d, 2d, 3d, 4d, \dots$$

oder

$$d; d + d; d + d + d, \dots$$

vor uns stehen. Es zeigt sich aber leicht, dass diese Reihe nicht eine Unterart, sondern die allgemeinere, die Hauptart ist, da keine Reihe einen besondern Anfang hat, vielmehr der Anfang willkürlich ist, und nur der Unterschied d in Wahrheit der Erzeuger der Reihe ist, die man dann anfangen kann, wo man will. Denn da es nur zufällig ist, dass wir die Reihe fortschreitend denken, so können wir in ihr auch zurückschreiten. Aber hier nicht blos bis zur möglichst niedrigen positiven Grösse, sondern noch weiter, denn auch durch die Null hindurch geht die subtractive Ordnung. Jede Reihe, die vorwärts oder zurückschreiten kann,

$$\dots 11, 9, 7, 5, 3, + 1, - 1, - 3, - 5, - 7 \dots$$

ist also nach beiden Seiten unendlich, hat also keinen Anfang, oder wenn sie einen Anfang hat, so hat sie etwa nur bei der Null den Anfang. Also die, einen bestimmten

Anfang supponirende, dann freilich auch darüber hinausgehende, Formel:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

aus welcher für ein beliebiges Glied die Regel $f = a + (n - 1) d$ entsteht, ist noch zu speciell entspricht nicht dem Wesen der arithmetischen Reihe, und die zweite nach beiden Seiten unendliche Formel:

$$\dots (d - 3d), (d - 2d), \text{Null}, d, (d + d) (d + 2d) \dots$$

oder:

$$\dots d, d + d, d + d + d, \dots$$

ist also die richtige, und stellt die arithmetische Reihe in ihrer Wesenheit, in ihrer höchsten Allgemeinheit dar. Man sieht, dass solche arithmetische Reihe nun anfangen kann, wo sie will, mit $10d$, mit $\frac{1}{2}d$ etc., wodurch die einzelnen Glieder $f = nd + a$ werden, was man mit Unrecht als $f = (n - 1) d + a$ oder als $a + (n - 1) d$ fasst, in der Stellzahl, in dem n , das a , als wäre es dem d gleichberechtigt, mitzählend, und sogar es, als wäre es vorzüglich berechtigt in der Formel voranstellend. Man sieht aber leicht ein, dass die richtigere Formel $f = nd + a$ ist, nemlich dass das Wesentliche einer Reihe der sie erzeugende Unterschied, ihre Subtractivität, das nur Unwesentliche der hinzukommende Anfang oder Zusatz ist. Die Algebra fasst daher jene ihre wesentlichste wichtigste Formel, ohne auf den beliebigen willkürlichen Anfang so viel Gewicht zu legen allgemeiner, und wir übersetzen diese wichtigste Formel: "die arithmetische Reihe ist eine Ordnung, und zwar die einfachste Ordnung, die subtractivisch, oder additorisch, d. h. so entsteht, dass etwas, d , sich setzt, und seine Setzung wiederholt. Sie ist eine Ordnung, die ebenso entsteht, wie die Zahl selbst aus der Eins. Es sind die einfachen Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, u. s. w.

nur gleichsam das berühmteste Beispiel solcher ersten Ordnung. Die „Zahlen“ glauben etwas Ursprüngliches, Einziges, zu sein, man erkennt sie hier als ein blosses Beispiel einer allgemeineren, der arithmetischen, Ordnung; es braucht von den Zahlen nie wieder die Rede zu sein, wenn man von der arithmetischen Ordnung im Allgemeinen reden kann. Durch den Unterschied

d

bezeichnet in der höchsten Abstraction die Algebra das Wesentlichste aller arithmetischen Reihen. Da es wünschenswerth ist die einzelnen Glieder aller dieser Reihen auch mit einem allgemeinen Ausdruck zu bezeichnen, so benennt man sie mit dem Zeichen

x

indem man diesen Buchstaben variabel denkt, und ihm alle Grössen die arithmetisch entstanden gedacht sind zu geben gestattet. Den Begriff der variablen Grösse, dass sie alle Grössen ist, benutzt also die Algebra, indem sie solches variables x für die Glieder von allen möglichen Reihen in dieser ihrer Abstraction setzt, und dann den Gedanken, dass eine Ordnung in all diesen Grössen ist, und zwar die einfachste, die arithmetische, Ordnung, gleichfalls, und zwar hauptsächlich, ausdrückt, indem sie sagt, der einfache Erzeuger jeder Grösse, x , ist d . Mit geringer Veränderung des Zeichens d in das Zeichen dx sagt dies auch die Differenzialrechnung: „das Differenzial von x ist dx “. Alle variablen beliebigen Grössen, die nicht besonders geformt sind (die nicht $\sqrt{x}$, x^n u. s. w. sind), sind also x , und in ihnen ist eine einfache Ordnung nemlich die Ordnung, dass irgend eine constante Differenz sie zu erzeugen, zu begreifen, sie subtractivisch zu messen, im Stande ist, welche Eigenschaft als dx gefasst ist. Dies ist, was jedermann wusste, was aber in dieser allge-

meinen Weise als x und dx zu wissen wichtig ist, weil die Betrachtung nun zu den geometrischen Reihen fortschreitet.

Wie die Addition und ihre Proportion die additive, oder arithmetische, Progression erzeugt, so erzeugt die Multiplication und ihre Proportion die geometrische, oder multiplicatorische Progression.

Ein einzelner multiplicatorischer, als Division auseinander gehaltener, Fall:

$8 \times 2 = 16$ oder $16 : 8 = 2$
ist zunächst wieder einem zweiten Fall gleich:

$$16 : 8 = 8 : 4$$

so entsteht die geometrische Proportion. Aber derselbe Fall ist mehreren Fällen gleich

$$2 : 4, = 4 : 8, = 8 : 16, = 16 : 32, \dots$$

es entsteht so aus der geometrischen Proportion die geometrische Reihe, oder geometrische Progression

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

in welcher wieder der Anfang und eine Zahl, welche der Exponent der Reihe heisst, zu ihrer Bildung zusammenwirken. Allgemein ist eine geometrische Reihe oder Ordnung also:

$$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, \dots$$

deren allgemeines Glied zunächst durch eine hieraus gezogene Formel benannt wird. Auch hier kann der Anfang a dem e , dem Exponenten der multiplicatorisch mit ihm wirkt, gleich sein, also $a = e$. Man sieht, dass die Multiplication dadurch zur Potenz wird. Die noch mit einer den besondern Anfang bezeichnenden, Multiplication behaftete Reihe, die wir zuerst gesetzt haben:

$$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, \dots$$

wird jetzt zu:

$$e, e^2, e^3, e^4 \dots$$

indem der Anfang, der dem Bildungsgesetz fremd war, hinweggedacht wird, denn einen wirklichen Anfang hat auch diese Reihe nicht. Auch sie ist nach beiden Seiten hin unendlich, indem die Gesetzlichkeit auch hier über ihren Anfang ohne freilich die Null zu berühren hinwegschreitet als

$$\dots e^5, e^4, e^3, e^2, e, \sqrt{e}, \sqrt[3]{e}, \dots$$

Dies ist also das Wesentliche einer geometrischen Ordnung, und ihre Definition ist also, dass ihre Ordnung dadurch entsteht, dass eine Grösse e sich multiplicatorisch durch sich selbst vermehrt, und sich durch sich selbst wurzelartig ebenso verkleinert.

Diese Gesetzlichkeit bleibt noch was sie ist, auch wenn sie nicht jede einzelne Vermehrung oder Verminderung als Resultat sehen lässt, sondern etwa je die zweite oder dritte. Es ist nicht blos:

$$e^3, e^4, e^5, e^6, e^7 \dots$$

sondern auch durch Ueberschlagung je eines Gliedes:

$$e^3, e^5, e^7, \dots$$

eine, durch e entstehende, geometrische Reihe. Die Zahlen, welche die successiv erhöhte Potenz von e bezeichnen, erscheinen dann nicht, wie zuerst der Fall war, in der Reihenfolge der gewöhnlichen oder natürlichen Zahlen, sondern in einer andren Reihenfolge, es kommt eine Aenderung, eine Variabilität, in diesen Theil der Formel, während die Zahl e immer dieselbe bleibt. Wäre die Variabilität eine allgemeine, so dürften wir schreiben

e^x
und wir hätten dadurch alle diese Reihen gefasst. Wir

sehen nun auch leicht, dass wirklich jene Variabilität eine allgemeine ist, denn wie wir je ein Glied überschlagen konnten, so können wir auch je zwei oder drei Glieder überschlagen, und da wir die Wurzelgesetzlichkeit

$$e, \sqrt{e}, \sqrt[3]{e}, \sqrt[4]{e} \dots$$

oder in andrer Schreibart

$$e, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{3}}, e^{\frac{1}{4}} \dots$$

als das Dividiren kennen lernten, und zu denken im Stande und berechtigt sind, so können wir auch den ursprünglichen Schritt der Reihe verengern, anstatt ihn zu erweitern, und die, noch immer bloß aus dem e entstandne, Ordnung:

$$e, e^{1+\frac{1}{2}}, e^2, e^{2+\frac{1}{2}}, e^3, e^{3+\frac{1}{2}} \dots$$

denken, und ebenso die Schritte anderweitig verengernd:

$$e^1, e^{\frac{5}{4}}, e^{\frac{6}{4}}, e^{\frac{7}{4}}, e^2, \dots$$

oder diese Schritte noch wieder verändernd:

$$e, e^{\sqrt{5}}, e^{2\sqrt{5}}, e^{3\sqrt{5}}, e^{4\sqrt{5}}, e^{5\sqrt{5}} \dots$$

und so weiter, ohne Begrenzung. Die Gesetzlichkeit, die wir, nicht in der Reihe selbst, sondern in den Exponenten, in den Zahlen, oder Zeichen, die die Potenzlichkeit andeuten, wahrnehmen, ist dann sehr verschieden, aber sie ist immer eine arithmetische Gesetzlichkeit, darin, und nur darin stimmen alle diese Fälle überein: ihre, der Exponenten, Ordnung ist immer eine arithmetische, 1, 2, 3, 4, oder 3, 5, 7, 9, oder $\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$, oder $1\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{5}$; wir sehen also in allen geometrischen Reihen immer ein gleichbleibendes e , und dieses e hat eine Reihe von nicht gleichbleibenden Grössen als Anzeiger seiner Potenz zur Seite, die in sich, wie sich dies

von selbst versteht, auch wieder eine Gesetzlichkeit beobachten, welche Gesetzlichkeit beliebig verschieden, aber immer eine arithmetische Gesetzlichkeit ist, es können also mit einem Worte alle Zahlen und Grössen, die den Grad der Potenzlichkeit des gleichbleibenden e anzeigen, x genannt werden, denn x ist jede Zahl mit dem Gedanken, dass sie durch eine arithmetische Gesetzlichkeit erzeugt ist

$$e^x \text{ oder } a^x$$

bedeutet also jede geometrische Reihe, weil

$$x$$

jede arithmetische Reihe bedeutet.

Wir sehen, wie tief, wie viel bedeutend die Algebra in ihrer Sprache werden kann, indem alle denkbaren arithmetischen Reihen, also jede denkbare Grösse, insofern sie auf einfache arithmetische Weise gemessen wird, in dem einen Buchstaben

$$x$$

vor uns stehen, und alle geometrischen Reihen ebenso vor uns stehen in dem Zeichen

$$e^x$$

in welchem e irgend eine constante Grösse, und x alle Grössen bezeichnet mit dem Nebengedanken, dass sie nicht geometrisch, wohl aber gesetzlich, nemlich arithmetisch, gemessen oder entstanden seien; denn die einfache Entstehung versteht sich von selbst, und wird nur angeführt, wenn eine andre auftritt, die nicht einfach ist. Die variable Grösse hat erst jetzt ihre letzte richtige Definition erhalten. Man glaubt, die variable Grösse x sei alles, und es sei in ihr keine Beschränkung; sie kann auch jede Grösse sein, und ist ganz allgemein die Grösse, aber mit der einen inneren wichtigen Beschränkung in Betreff der Genesis oder ihrer Ordnung, dass sie arithmetisch entstanden oder

geordnet sei: denn eine aus geometrischer Gesetzlichkeit entstehende Variable ist nicht x sondern e^x . Auch e^x bedeutet jede Grösse, hier mit der Beschränkung, dass sie auf multiplicatorische Weise entstanden sei. Der Ausdruck *variable indépendante*, willkürliche Veränderliche sollte vermieden werden: x ist nicht eine willkürliche Veränderliche *variable indépendante*, sondern eine einförmig sich verändernde Grösse.

Das e kann nicht die Grösse Eins sein. Zwar ist dies theoretisch in der Formel e^x möglich, aber da die Eins auf jeder Potenz sich selbst gleich ist, so kommt durch diese Form keine Ordnung in die Vielheit, sondern nur etwa eine Ordnung in die Eins, die dieser nicht bedarf, und die Absicht wird nicht erreicht. Also e kann übrigens jede Grösse, nur nicht die Grösse Eins, sein. Aus der blossen Eins kann nur arithmetische Ordnung entstehen, die geometrische Ordnung bedarf einer andern, zuerst aus der Eins gewordenen, Zahl. Die geometrische Ordnung, die nicht aus der Wurzel Eins, sondern aus einer Wurzel, die selbst Function von Eins ist, entsteht, kann aber der Entstehung ihrer Wurzel aus der Eins sich einmal erinnern, und erscheint dann nicht wie früher als

... $e^3, e^2, e^1, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{3}}, e^{\frac{1}{4}}$...
sondern als

... $e^3, e^2, e^1, e^0, e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}$...
und in einem Zahlenbeispiel nicht als

... $16, 8, 4, 2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots$
sondern als

... $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \dots$

Die Wurzel e wirft hier einmal ihren Character der Potenzlichkeit ab, wird einmal eine Nichtpotenz e^0 , thut ein-

mal diesen Schritt von ihr selbst hin zur Eins, da jede Grösse auf der Potenz Null Eins ist. Von nun an wird die Gesetzlichkeit der Reihe gestört, ihre Fortsetzung ist nicht mehr rein aus dem Potenzgesetz, sondern aus diesem und aus einem Andren, und zwar aus einer gewöhnlichen Multiplication entstanden, da die Wurzel sich durch Wegwerfung ihrer Potenzlichkeit, und Dividirung, einmal zur Eins gemacht hat. Diese Trübung der Gesetzlichkeit durch Aufnahme eines Elementes, welches sie aufzunehmen nicht veranlasst war, bildet eine Nebengesetzlichkeit, deren viele möglich sind, aber hier noch nicht in Frage sind.

Es giebt von diesen Trübungen in dem Zurückbiegen der Reihen, und andren Momenten, durch welche Nebenreihen entstehen können, abgesehen, eine dritte Hauptklasse von Reihen, die von Anfang an, also auch in ihrer Vergrösserung insofern getrübt sind, dass sie nicht rein arithmetisch oder rein geometrisch, sondern aus diesen beiden Rechnungsarten innig zusammengesetzt sind, nemlich die auf arithmetische Reihen gebauten Potenzreihen. Nehmen wir eine arithmetische Reihe, oder Ordnung:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$$

und errichten darauf die Potenzreihe:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

so heisst diese Potenzreihe augenscheinlich

$$x^2$$

Auch die auf eine andre arithmetische Reihe

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

gebaute Potenzreihe

$$4, 16, 36, 64, \dots$$

ist in dem Ausdruck x^2 mit einbegriffen, da x , wie wir wissen, nur überhaupt eine arithmetische Reihe bedeutet,

also x^2 jede auf irgend eine arithmetische Ordnung gebaute Ordnung der 2ten Potenz anzeigt.

Eine arithmetische Reihe in 3ter Potenz wird also allgemein durch

$$x^3$$

bezeichnet, und also durch

$$x^m$$

alle diese Reihen, da x alle beliebigen, mehrmal unendlich vielen, arithmetischen, Reihen umfasst.

Zu den arithmetischen Reihen:

gehören also die potenzlichen Reihen:

$\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$	(x)	$\dots 9, 4, 1, \overset{0^2}{\infty}, 1, 4, 9, 16 \dots$	(x^2)
$\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$	(x)	$\dots -8, -1, 0^3, 1, 8, 27, 64 \dots$	(x^3)
$\dots 2, 3, 4 \dots$	(x)	$\dots 2^a, 3^a, 4^a \dots$	(x^a)
$\dots \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8} \dots$	(x)	$\dots (\frac{1}{8})^a, (\frac{2}{8})^a, (\frac{3}{8})^a \dots$	(x^a)
$\dots -10, -7, -4, -1, +2, 5, \dots$	(x)	$\dots +100, +49, +16, +1, +4, +25 \dots$	(x^2)
$\dots -10, -7, -4, -1, +2, 5, \dots$	(x)	$\dots -1000, -343, -64, -1, +16, +125 \dots$	(x^2)
$\dots -10, -7, -4, -1, +2, 5, \dots$	(x)	$\dots (-10)^a, (-7)^a, (-4)^a, (-1)^a, (+2)^a, (+5)^a \dots$	(x^a)
$\dots \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3} \dots$	(x)	$\dots 3, 12, 27 \dots$	(x^2)
$\dots -3 \overset{1^2}{\sqrt{9}}, +4 \overset{1^2}{\sqrt{9}}, 11 \overset{1^2}{\sqrt{9}} \dots$	(x)	$\dots +9 \overset{1^2}{\sqrt{9^2}}, 16 \overset{1^2}{\sqrt{9^2}}, 25 \overset{1^2}{\sqrt{9^2}} \dots$	(x^2)
$\dots \sqrt{-4}, 3\sqrt{-4}, 6\sqrt{-4}, \dots$	(x)	$\dots -4, -36, -144, \dots$	(x^2)

Wir führen diese Beispiele gleichsam beiläufig an, denn diese und alle andere Details verschwinden vor dem Gedanken, dass diese Reihen alle einerseits x , und andererseits x^m sind. Wir hatten früher x und e^x (oder m^x), jetzt haben wir also ausserdem x^m , also nun x , x^m und m^x im Gedanken vor uns stehen, als drei Arten von Ordnungen, oder Reihen, als drei grossartige Gegensätze, zwischen erstens den arithmetischen, zweitens den gemischtarithmetisch-geometrischen, und drittens den geometrischen Reihen.

Jene beiden Rechnungsarten x und e^x , und eine zwischen ihnen stehende, sie vermittelnde Art x^m , die aus Addiren und Multipliciren zusammen entsteht, sind also wie der Anfang so auch das höchste Endziel der Algebra. Der einzelne Anfang in ihnen ist die Constante die hinzutritt, welche aber fast ganz unwichtig ist. Indem dies bekannt wird, und überhaupt das Gesetz als wichtiger, denn seine einzelnen Fälle erschienen ist, haben sich diese beiden Rechnungsarten zur höchsten Abstraction aufgehoben. Da es in der Algebra keine andre als diese Rechnungsarten giebt, so ist jede irgendwie seiende Grösse nun um ihren Ursprung, oder wenn man das Bild der Zeit hier denkt, um ihre Entstehungsweise, befragt, zu dem Ende sind ihre Gattungen durch einfache Zeichen x , e^x , x^m geschieden, und von dem x haben wir auch die Entstehungsart, die Differenz d , oder dx , als das arithmetische Werden schon ohne Mühe gefasst, und werden nun sehen, wie als Differenzialrechnung diese arithmetische Entstehungsweise in die andren Formen x^m und e^x hineindringt.

Viertes Capitel.

Die Differenzialrechnung.

Die Algebra hat es im Allgemeinen durch die Proportion und Progression klar gemacht, dass das Sein einer Grösse dem Werden derselben untergeordnet ist. Sein und Werden sind aber nur bildliche Ausdrücke. Die Algebra ist allgemeiner abstracter als diese und alle Worte, welche den Begriff von Zeit, oder irgend welche andre Begriffe als blos den der Verhältnisse in ihr Bild hineinnehmen. Das warum es in der Differenzialrechnung zu thun ist, und was wir nur bildlich als den Gegensatz des Werdens gegen das Sein ausdrücken, ist am reinsten vielleicht durch den Ausdruck der Absolutheit der Grössen, einerseits, und der Grössen in ihrer Relativität zu einander, andererseits, zu fassen, und jene Betrachtungsweise die Integralform, diese das Differenzial zu nennen. Man entschuldige uns, wenn wir etwas ungewöhnlich gebildete Worte „Absolutheit“, „Relativität“ („subtractive Relativität“ oder „Subtractivität“) und speciell bildliche Ausdrücke „Werden“, „Entstehen“ bisher gebraucht haben, und noch ferner gebrauchen werden. Die technischen Ausdrücke „Integralform“ und deren „Differenzial“ haben den Vortheil, durch den langen Gebrauch das besondere Bild, das historisch ihnen zu Grunde liegt, schon verwischt zu haben, ungefähr wie die Ausdrücke Genitiv, Dativ besser sind als die Ausdrücke „Zeugungs-

fall", „Gebefall", die man bisweilen an ihre Stelle setzt, welche letztere die Specialität des Zeugens und Gebens zu sehr betonen, während die lateinischen Ausdrücke Dativ und Genitiv zwar gleichfalls eine Specialität historisch bedeuten, aber durch den langen Gebrauch diese nur specielle Bedeutung verwischt haben, und grade eben deshalb wahrer und besser das andeuten, was zu bezeichnen ist, was abstracter als Zeugen und Geben, diese beiden Fälle mit einschliesst, ohne darauf beschränkt zu sein. Das Vielerlei, welches durch den Genitiv und Dativ alles angedeutet wird, ist nicht so einfach zu kategorisiren, eben wie es nicht so einfach ist, zu fassen, was die Integralform und ihr Differenzial alles bedeuten. Indem wir mit den andren bildlichen Ausdrücken der Sprache abwechseln, glauben wir den kalten technischen Ausdrücken Leben einzuhauchen, ohne dass die Bilder dem allerdings viel abstracteren Begriff grade gefährlich werden, da die Abwechselung das eine Bild durch das andre unschädlich machen wird. Die Differenzialrechnung ist sehr abstract. Schon die Zahl ist es in so hohem Grade, dass sie gleichsam überall hineinschleicht, in die ganze Welt hineindringt, aber die Differenzialrechnung ist dies in noch höherem Grade. Sie dringt noch tiefer, als alle andren Entwicklungen der Zahl, in die Fugen des Seins hinein. Differenziale und Integrale können alle möglichen Bedeutungen haben, bisweilen haben sie die Bedeutung des Werdens und Seins, bisweilen eine specielle geometrische oder physikalische Bedeutung, u. s. w., indem sie dort, wie überall, die Ursache aus den Wirkungen und umgekehrt begreifen, oder vielmehr die Kette der Ursachen rückwärts oder vorwärts durchgehen.

Wir wissen aus dem Bisherigen, dass die Relativität der absoluten Grössen auf zweierlei Weise, geometrisch oder arithmetisch gemessen werden kann, d. h. multiplica-

torisch oder subtractivisch, sie wird in der Differenzialrechnung aber subtractivisch gemessen. Auch die geometrischen Ordnungen, die nicht subtractivisch entstanden sind, sollen subtractivisch gemessen werden. Das ist die bestimmte Definition der Differenzialrechnung. Denn da verschiedene Entstehungsgesetze, die arithmetischen, die gemischt arithmetisch-geometrischen, und die geometrischen, nicht nur so neben einander gelassen werden können, vielmehr sie vorzüglich sich miteinander vergleichen, messen, müssen, so muss eines von ihnen zum Masse gewählt werden. Das arithmetische Gesetz nimmt sich das Vorrecht, die andren als gar nicht existirend, nemlich als aus sich, dem Additionsgesetz, dx , entstanden zu denken. Die Differenzialrechnung hat zum Massstab die ungeformte Grösse (x) und ihre einfache Entstehungsweise und Ordnung (dx) und misst damit alle andren Grössen.

Die Algebra hatte also durch die Proportionen und Progressionen erfahren, dass die Absolutheit der Grösse weniger wichtig ist, als ihre Relativität, und dass der Relativitäten zwei, die arithmetische und die geometrische, einander gegenüberstehen, von welchen die Differenzialrechnung eine beseitigt, indem sie diese beiden Relativitäten oder Entstehungsweisen, auf den gleichen Nenner der arithmetischen Entstehungsweise reducirt. Könnte man die Relativität in den Integralausdrücken auch auf den gleichen Nenner der geometrischen Entstehungsart reduciren? könnte man also alle Relativitäten statt durch eine verallgemeinerte Differenzialrechnung vielleicht durch eine verallgemeinerte Divisionalrechnung untersuchen und messen? Diese Frage, die wir aufwerfen, muss das warum es zu thun ist verdeutlichen. Die arithmetische oder subtractive Messung hat für sich einen Vorzug, und zwar den wesentlichen Vorzug, dass sie eine Zahl nicht bloß an Zahlen sondern auch an der Null misst, während die geo-

metrische Messung niemals die Null erreicht. Jede geometrische Messung kommt daher gar nicht zur wahrhaften Relation, d. h. zum Verhältniss des Einen (Zahl) an einem Andern (der Null), sondern immer nur zu einem Messen des einen am einen, zu einer Relation der Zahl an der Zahl. Die geometrische Messung verharret in der Gleichung:

$$1 = 1$$

während die arithmetische zu der Gleichung kommt:

$$1 = 0 + 1$$

Die geometrische Messung würde alle Entwicklungen, zu welchen die Eins sich entfaltet, also die ganze Algebra, umfassen, mit Ausnahme derjenigen Gebiete, die jenseits der Null liegen. Denn erzwingt zwar die Consequenz der Gesetzmässigkeit, nachdem die Null und die Minuszahlen existiren, die Anwendung der geometrischen Gesetzlichkeit auch auf jene, wie z. B. auf die arithmetische auch negative Reihe:

$$\dots - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

in der zweiten Potenz die Reihe:

$$\dots + 16, + 9, + 4, + 1, \overset{0^2}{\infty}, + 1, + 4, + 9, + 16, \dots$$

gebaut wird, die auch in das negative Gebiet hineingeht so sieht man doch, dass das geometrische Gesetz in dem negativen Gebiet diesem Gebiet untreu wird, und hier zweideutig wird, da Minus mal Minus wieder Plus wird, und in dem Nullfall selbst ist noch die Verlegenheit, ob denn dies Null oder Unendlich sein soll. In der rein geometrischen Reihe a^x , z. B. in der Reihe:

$$\dots 16, 8, 4, 2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2} \dots$$

und auch in der Reihe:

$$\dots 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$$

hat die Null gar keine Stelle, und bereitet ihr die Minuszahl noch neue Schwierigkeiten, indem die Quadratwurzel, und allgemein $2n^{\text{te}}$ Wurzel, aus einer Minuszahl, $\sqrt[2n]{-a}$, gar nicht im Reich der Möglichkeit ist, was die Consequenz des Denkens zur Anerkennung von bloß imaginären Zahlen und Grössen veranlasst, durch die aber grade die tiefste Versenkung in das Wesen der Zahlen erst möglich wird. Das Messen der Zahlen an der Null, das Erzwingen des Hinangehens auch der geometrischen Gesetzlichkeit an dieses ihr unerreichbar scheinende Nichts, ist wichtig, und die Differenzialrechnung erzwingt diese allgemeine Messung an der Null, sie ist also jedenfalls tiefer als eine Divisionalrechnung sein würde, die alle verschiedenen Relativitäten auf den gemeinsamen Nenner der geometrischen Relation bringen wollte. Alle Ordnungen, welche durch die Eins in das Viele gebracht werden, sind, mit andren Worten, besser begriffen, wenn man das Messen ihrer Relativitäten bei der Null, als nur bei irgend einer Zahl, oder etwa bei der Eins, anfängt, welche auch schon geworden ist, und ihr Entstehen aus der Null, ihre Relativität an der Null, auch noch anzuschauen wünscht. Die Gleichung: $1 = 1$ ist weniger bedeutungsvoll, als die Gleichung: $1 = 0 + 1$. Die Relationen zwischen den Grössen sind also nicht in einer Divisionalrechnung, sondern subtractivisch in einer Differenzialrechnung betrachtet, was auch um deshalb sich als nothwendig ausweist, weil das Additionsgesetz das ursprüngliche, erste Entstehungsgesetz ist. Wäre nur so, wie die Multiplication bloß in der Erfahrung früher ist, als die Potenz, in der Theorie aber der Potenzgedanke als der höhere die Multiplication,

als willkürlichen Anfang der Reihe umfasst, so auch die Additionsordnung nur historisch früher, und ihre tiefere Wahrheit in der nur später gefundenen Potenz zu fassen, dann würde eine höchste Divisionalrechnung mehr Recht haben als eine Differentialrechnung. Dies ist aber nicht der Fall. Nicht bloß in der Erfahrung, im Erkenntwerden, ist die Addition früher, als die Multiplication, sondern auch in höchster Abstraction, im reinsten Denken, ist die Addition das erste. Es muss zuerst eine Position stattfinden, die schon eine Addition, nemlich eine Addition zur Null ist, ehe die Rechnungsart oder Ordnung der Multiplication entstehen kann. Aber es muss sogar auch noch jedenfalls eine zweite Position stattfinden, ehe irgend ein multiplicatorisches Ordnen gedacht werden kann, da die erste Position Eins, noch so häufig mit sich multiplicirt, eine Multiplications - Gesetzlichkeit nicht erschafft, die Eins in allen Multiplicationen mit sich immer Eins bleibt. Also die Addition ist nicht bloß historisch, sondern auch theoretisch und im reinen Denken das Erste, das Erzeugende. Giebt es also überhaupt nur zwei Rechnungsarten, und dies hat sich deutlich genug ergeben, nemlich nur Addition (mit der Subtraction) einerseits, und die Potenz als allgemeiner multiplicatorischer Gedanke andererseits (mit der Unterart, der Multiplication, und mit den drei Umkehrungen, Division, Wurzelziehen, und Logarithmiren) und kommt es zu einem Messen dieser Rechnungsarten aneinander, so darf die Addition das Mass zu sein verlangen, da sie nicht bloß im Erkenntwerden, sondern absolut der Anfang, das Einfache, Erste, ist, das an die Null hinanzutreten im Stande ist, und in die negativen Gebiete hineingeht, und nur sie also ein wirkliches Messen genannt werden kann, und das einfachste Messen und Ordnen ist.

Die Absolutheiten sind also ihren Relativitäten entgegengesetzt, und jene werden durch die Variablen be-

zeichnet. Die Differenzialrechnung benutzt es, dass x die einfach entstandnen Grössen alle zusammen, e^x die geometrischen Grössen u. s. w. bedeutet. Es werden also die Bewegungen der Variablen betrachtet, und so sehr concentrirt sich die Untersuchung auf die Gesetze der Bewegung, dass die Grössen selbst als variabel gleichsam bei Seite gesetzt werden. Oder man kann sagen, da die Variable alles ist, so beschäftigt man sich nicht mit dem was sie ist, sondern mit ihrer Bewegungsart. In der Differenzialrechnung erfasst die Variable ihre Variabilität. Dies ist so wahr, dass vor der Differenzialrechnung die Variable im rechten Sinne des Wortes noch gar nicht existirte. Sie war vor Erfindung der Differenzialrechnung nur was man jetzt constante arbitraire nennt, ähnlich derjenigen Constanten, die man jetzt noch bei der Integrirung hinzuzufinden hat, die man, weil sie jede mögliche Grösse haben kann, durch die „Arbiträr-constante“ C ausdrückt. Eine solche Constante ist „variabel“, in dem vor Erfindung der Differenzialrechnung möglichen Sinne des Wortes, als man in den Buchstaben x , u , t und in dem Gedanken einer Variablen, zwar alle Grössen, aber doch nur in diesem Sinne vor sich hatte, dass man von allen ihren absoluten Werthen immer nur jeden für sich betrachtete, nicht aber den einen in Beziehung zum andern, nicht die Relativität, gleichsam nicht das Hinübergehen des einen Werthes über den Zwischenraum zwischen beiden hin zum andren. Newton beginnt seinen berühmten Tractat de quadratura mit den Worten: Quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis „constantes“ sed ex motu continuo descriptas hic considero, er gab dadurch dem todten Buchstaben Bewegung, er machte dadurch die indeterminata invariabilis des Cavalleri allererst zur Variablen, und erst nachdem die Differenzialrechnung geboren war, bedeutete die Variable

wirklich alle Constantes arbitraires zugleich, im Verhältniss zu einander, nicht jede allein. Absolute Betrachtung und relative Betrachtung sind der Gegensatz; x , x^2 sind Zeichen für die absolute Betrachtung, und sind zuerst Constantes arbitraires, aber wenn in der relativen Betrachtung der eine Zustand der Constante arbitraire sich an allen ihren eignen andren Zuständen misst, wenn alle einzelnen Werthe nicht ohne Beziehung bleiben, wenn die Variabilität, die sich in ihnen findet, gefasst wird, erst dann ist von einer Variablen in dem jetzigen vollen Sinne des Wortes die Rede. Dies erkennt man, und verfällt auf den Gedanken des Unendlichkleinen. Weil bei Erfindung der Differenzialrechnung die Variable sich doch noch nicht ganz als das was sie ist erfasst hatte, so blieb man unwillkürlich bei dem alten, hartnäckig sich erhaltenden, Gedanken, und glaubte eine Grösse sei doch nur constant, und wenn man z. B. x^2 differenzialisch untersuchte, so glaubte man $x + k$ an die Stelle von x setzen zu dürfen, als ob man zu einer Variablen etwas hinzusetzen könnte, und dann zwei ihrer Fälle hätte, vergessend, dass sie alle Fälle ist. Das x ist schon alle Fälle, wie kann man glauben, wenn man k additorisch hinzusetzt, nur zwei Fälle — oder gar wie man meint nur einen der Fälle — vor sich zu haben. Wenn man zu einer Variablen k hinzufügt, um einen Fall zu haben, so ist x ja nicht mehr variabel, sondern die Variable ist angehalten, man hat sie zum Stehen gebracht, aus der Variablen ist eine Indeterminata invariabilis, eine Constante, quae stat, geworden. Leugnet man dies und glaubt noch immer, dass in $(x + k)^2$ das x variabel geblieben sei, so hat man doppelt unrecht, weil ja dann man begreifen müsste, dass die Variable mit einer an sie gehefteten Constanten (k) in die Potenzgesetzlichkeit hineingeworfen, $(x + k)^2$, ein ganz Verschiednes von x^2 sein muss. Aber die Variable bleibt bei solchem Manöver nicht

variabel, man macht sie zur Constanten, was man unbedingt kann, da in dem höheren Gedanken der Variablen, der niedere der Constanten enthalten ist, was man aber nicht ohne Bewusstsein thun darf. In einer Vorrede zu den Institutionen des Differenzialcalcüls sagte der grösste Geometer bald nach Erfindung dieser neuen Rechnung, was ihm alle Geometer bis auf den heutigen Tag nachgesprochen haben: „Um das Differenzial in x zu fassen, muss ich x wirklich verändern.“ Nein! ich darf x wirklich nicht verändern, wenn es schon variabel ist, um seine Variabilität zu messen. Glaubt man, auf einem niedren Standpunkt, zu x , welches variabel ist, äusserlich etwas hinzuthun zu können, und in $(x + k)^2 - x^2$ die Variabilität von x^2 zu betrachten, so muss man dann geheimnissvoll hinzusetzen, das k sei unendlich klein, und müsse verschwinden. Allerdings muss es verschwinden, da es ausserhalb des x nichts zu schaffen hat, aber in dem x muss es auferweckt werden. Wenn man äusserlich zu dem x das k hinzusetzt, so begeht man einen Fehler. Wir zeigten im ersten Theil dieser Schrift, wie dieser Fehler, den die Subtraction begeht, nicht durch metaphysische Spitzfindigkeiten, durch den Gedanken eines Undings, das Grösse und doch unendlich klein sein soll, versteckt, sondern eingestanden, und dann durch die Subtraction selbst verbessert werden muss, dass man den einen Fehler mit andren Fehlern, die man hinzuthut, vergleichen, messen kann. Aber das alles ist unnöthig, wenn man den Begriff der Differenzialrechnung so abstract, wie er wirklich ist, gefasst hat, und man weiss, was die Differenzialrechnung beabsichtigt. Es macht sich dann die Ausführung ganz von selbst.

Halten wir nur fest, dass k , oder dx , constant ist. Merkwürdigerweise scheint aber auch dies wieder Niemand einzugestehen. Eine doppelte Unrichtigkeit begeht man

also, indem man die Variable, x , zur Constanten degradiert, und das k , oder dx , variabel macht. Hierdurch ist selbst Leibniz in einen Fehler verfallen, den wir in der letzten Anmerkung besprochen. Zwar sagt man nicht geradezu, dass dx „variabel“ sei, aber indem man es kleiner und kleiner denkt, so stellt sich etwas Veränderliches wider Willen in dem Gedanken ein, und wenn dann das zweite Differenzial in Frage kommt und man sagt: dx ist nun zu behandeln als ob es constant wäre, so verräth man sich, denn der Leser hört nun, dass dx also nicht gleich und ernsthaft constant war seiner innern Natur nach, da man es bei dem zweiten, höheren, Differenzialen, als constant zu nehmen, erst gedrungen wird.

Halten wir uns auf der Höhe der Abstraction, die durch das constante dx und durch den Gedanken der Variablen in der Differenzialrechnung erreicht ist, dann werden wir sehr einfach und leicht die positiven und directen Beweise aller Regeln dieser abstracten Rechnung ableiten.

Fünftes Capitel.

Das erste Differenzial.

Wir haben den Sinn der Differenzialrechnung erfasst, und in den drei Formen von Grössen x , x^m , und a^x die Gegensätze erkannt, deren Variabilität mit einander verglichen werden soll. Die Variabilität des x ist constant, sie ist dx , d. h. sie ist die einfachste Variabilität, nemlich diejenige, die gleichbleibende ihr selbst ähnliche Unterschiede zum subtractiven Masse hat. Alle Grössen, die nur einfache Grössen sind, x , u , t , u. s. w., sind sich darin gleich, dass die Subtractivität in ihnen durch eine beliebige von ihnen selbst nicht verschiedene (nur nicht variable, sondern constante) Grösse dx , du , dt , zu messen. Es ist nun $d(t + u) = dt + du$. In diesem Satz ist gleich die ganze Differenzialrechnung bewiesen. Es scheint sehr klar zu sein, dass das Differenzial der Summirten $d(t + u) = dt + du$, d. h. gleich der Summe der Differenziale jedes Gliedes ist, weil alles, was mit den Grössen selbst vorgenommen wurde, $t + u$, (Addition) hier auch in ihrem Differenzial $dt + du$ als vorzunehmen sich wieder findet. Dieser Schluss von der Integralform auf die Differenzialform und umgekehrt, also dass mit der einen geschehe, was mit der andren geschieht, ist aber nicht allgemein gültig, z. B. $d(ut)$, das Differenzial eines Productes, ist nicht $dudt$, und $dudt$ hat zum Inte-

gral etwas anders als ut , und darin eben liegt die Schwierigkeit des Differenzirens, und die grössere Schwierigkeit des Integrirens, dass jener Schluss nicht allgemeine Gültigkeit hat. Hier aber, wo das, was mit den Grössen u und t in der Integralform $u + t$ geschieht, ein additorisches Hinzufügen, und der Begriff des Differenzials selbst grade derselbe des additorischen Hinzufügens ist, also die Verwicklung, die Form, des Integrals selbst nur eine arithmetische ist, ist jener Schluss noch richtig. Wir können darüber noch eine Bemerkung hinzusetzen, obgleich der vorstehende Grund schon schlagend ist, auch bestreitet dies Niemand und liegt dies auch in allem, was wir bisher gesagt haben. Additorische Ordnung ist es nicht, die der Differenzialrechnung Schwierigkeiten bereitet, das giebt jeder zu, und wir haben nur, wie wir glauben, einen guten Grund dafür in dem Vorhergehenden gesetzt, indem wir es bestimmt behaupten, dass die additorische Ordnung das Mass ist, mit welchem alle Ordnung grade gemessen werden soll. Wenn also zu einer einfachen, d. h. additorischen Variablen, u , eine andre additorische Variable, t , auf additorische Weise hinzugefügt wird $u + t$, so können die Differenzen in dem was so entsteht, keine andren sein, als die vereinten Differenzen in den Theilen. Es sei $du = 2$ und u in diesem Beispiel successiv:

2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .

dt sei = 4 und t successiv in dem Beispiel

3, 7, 11, 15, 19, 23, . . .

so ist $u + t$:

5, 11, 17, 23, 29, 35, . . .

oder 9, 15, 21, 27, 33, 39, . . .

oder 13, 19, 25, 31, 37, 43, . . . etc.

worin augenscheinlich die Differenz 6 sich findet nemlich du ($= 2$) $+ dt$ ($= 4$), denn während zu irgend einer Grösse, die aus der ersten Differenz entsteht, irgend eine aus der zweiten Differenz entstandne Grösse addirt wird, und dann zu der nächst oder später folgenden dort, die nächstfolgende hier, so bleibt die Entfernung jener nicht was sie ist, sondern es tritt die Entfernung dieser hinzu, da nicht gleiche Grössen, sondern um eine Differenz verschiedene Grössen addirt werden.

Die addirten Integralgrössen sind also sehr leicht zu differenziren, und darin ist die ganze Differenzialrechnung bewiesen.

Denn wenn $d(u + t) = du + dt$, so folgt, wenn die beiden zu addirenden gleich sind, $x + x$, dass noch natürlicher $d(2x) = 2dx$, also $d(ax) = adx$. Will man auch hier ein Beispiel, so ist ax wenn $a = 3$ und $dx = 4$ vielleicht

3 mal (. . . 4, 8, 12, 16, 20 . . .)

oder vielleicht

3 mal (. . . 2, 6, 10, 14, 18 . . .)

oder wenn $dx = d$ allgemein

3 mal eine Constante plus (. . . d , $2d$, $3d$. . .)

worin, nachdem die Multiplication mit der 3 stattfand, die Differenz 3 mal 4 oder 3 mal d , nemlich a mal dx oder adx sich findet. Wir fügen wegen des Folgenden noch ein andres Beispiel hinzu, und sagen: wenn $dx = 5$, so ist etwa $2x$:

. . . 2, 2, 2, 2, 2, . . .

x . . . 3, 8, 13, 18, 23, . . . worin $dx = 5$

$2x$. . . 6, 16, 26, 36, 46, . . . worin $2dx = 10 = 2 \cdot 5$

Der Ausdruck $d(ax) = adx$ sagt also, dass das Differen-

zial dx um dieselbe Grösse (etwa 2 oder allgemein a) vergrössert wird, um welche die Absolutheit x , u , t vergrössert wird. Zwar wird nicht blos die erste Absolutheit, die Zahl 3, sondern jede, also auch die zweite, 8, mit a oder mit 2 multiplicirt, aber die geringste Aufmerksamkeit lehrt, dass dieselbe Multiplication, also die gleichvielfache Addition, bei der zweiten Absolutheit einen grösseren Einfluss haben muss, als bei der kleiner gedachten, und zwar auch grade einen um so viel grösseren, als die grösser gedachte Absolutheit grösser ist, also muss die Differenz beider durch deren Multiplication ebenso vergrössert worden sein. Also das in den einförmigen Variablen x , u , t , constante Differenzial ist in zwei addirten $u + t$ also $du + dt$, in dem Falle, wo die addirten Variablen gleich, (nicht $u + t$ sondern $x + x$) sind, also $2dx$, und wenn der zu addirenden und gleichbewegten Variablen eine beliebige aber bestimmte Menge ist, also in dem Falle ax also adx .

Ist aber eine einfache Variable, oder eine einfache Integralform, u (in welcher also ein constantes Differenzial ist) nicht in einer bestimmten Menge a gedacht, sondern mit einer andern Variablen t multiplicirt, in welcher (t) auch ein Differenzial ist, d. h. sind der zu addirenden Variablen nicht eine bestimmte Menge, ist also der Fall

ut

in Frage z. B.

$u \dots 2, 4, 6, 8, 10 \dots$ worin $du = 2$

$t \dots 3, 8, 13, 18, 23 \dots$ worin $dt = 5$

$ut \dots 6, 32, 78, 144, 230 \dots$

so begreift man, dass das Differenzial in dem Resultat ein andres, als das bisherige, sein muss. In unsrem jetzigen

Beispiel wird zwar die erste Zahl 3 mit der ersten Zahl zwei, aber die zweite Zahl 8, nicht mit jener selben Zahl (2), sondern mit einer andren multiplicirt. Es bewegen sich beide Factoren (vielleicht verschieden, vielleicht gleich). Man begreift hier ohne weitres, dass die Bewegung, die in dem Resultat dieser, der Multiplication, ist, nicht mit der Bewegung des einen Factors allein verglichen werden, und nicht ein Vielfaches der Bewegung des einen Factors allein sein kann, sondern dass der andre Factor nicht blos in seiner Absolutheit, sondern auch in seiner Bewegung mit in Betracht kommt. Ist in u die constante Subtractivität $(du) = 2$, und ist die Subtractivität der zweiten Absolutheiten (t), die durch dt bezeichnet ist, $= 5$, so muss in dem Resultat eine irgendwie aus der 2 und aus der 5 bestehende Subtractivität sein. Was sie sei, muss wieder der frühere einfachere Fall ax lehren. In ihm war die Subtractivität in der einen Reihe $dx = 2$, in der andren Reihe Null (dort existirte gar keine Subtractivität), dennoch wurde durch die blos absolute Grösse der multiplicirenden, als Reihe gesetzten, sich gleichbleibenden, Zahl 2, also durch deren blos absolute Grösse, im Resultat die Subtractivität der andren verändert, aus dx wurde adx . Also wird dies auch hier mit den Subtractivitäten der Fall sein. Dort war das Differenzial der einen Reihe, die eine Subtractivität hatte, zu multipliciren, nicht mit dem Differenzial der andren Reihe (das $=$ Null war), sondern mit der Absolutheit der Reihe 2, 2, 2, 2, dadurch wurde die Subtractivität jener vergrössert. Auch in dem jetzt fraglichen Falle

ut

also in dem Beispiel

2, 4, 6, 8, 10 . . .
mal . . . 3, 8, 13, 18, 23 . . .

kann man also die Absolutheiten, wie es die Aufgabe verlangt, nicht mit einander vermehren, ohne die Bewegung in jeder Reihe um die Beträge der Absolutheit der andren zu vermehren. Es wird die constante Subtractivität der einen Reihe dt zu udt , und die constante Subtractivität der andren du wird zu tdu , mithin ist

$$u dt + t du$$

das in dem Resultat sich findende Differenzial, das also verglichen werden konnte nicht mit einer der beiden Bewegungen du oder dt , sondern mit ihnen beiden. Mit andren Worten, es ist das Differenzial, das aus der Multiplicirung der Absolutheiten (wohl zu bemerken nur der Absolutheiten, nicht etwa auch der Differenziale mit einander, von deren Multiplicirung in der Aufgabe nicht die Rede ist), also es ist die Bewegung, die in dem Resultat der Multiplication der (absoluten) Variablen ut sich findet, die Bewegung, die in der einen war (du), multiplicirt mit der irgend welchen Grösse der andren, und die Bewegung der zweiten (dt) ebenso multiplicirt mit der Grösse jener. Also wie und weil $d(ax) = adx$, so und deshalb ist $d(ut) = udt + tdu$. Daraus folgt alles Andre, nemlich die Regel für die Potenz, in welcher ja statt ut nur uu (oder tt) zu setzen ist, und

$$d(u^2) = d(uu) = udu + udu = 2udu$$

oder:

$$d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$$

sich gleich ergibt. In dem Fall

$$utv$$

oder der dreifachen Multiplicirung von variablen Grössen, deren jede eine beliebige Subtractivität hat, finden wir

ebenso, dass die Subtractivität jeder Reihe sich mit dem Product der beiden andern Absolutheiten vermehrt, dies sagt die Differenzialrechnung in ihren Zeichen

$$d(utv) = tvdu + uvdt + utdv$$

woraus, wenn $u = t = v$

$$d(u^3) = u^2du + u^2du + u^2du = 3u^2du$$

Also $d(x^3) = 3x^2dx$. Hieraus ergibt sich allgemein

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx$$

Also aus dem Multiplicationsfall folgen die Potenzen.

Wir sollten nun noch den Fall a^x direct beweisen, doch scheint dies ohne Vorausschickung der Integralrechnung, worüber wir erst in einer zweiten Arbeit, wenn Zeit und Musse dazu bleibt, und über die Cirkelfunctionen, einiges sagen zu können hoffen, nicht erreichbar zu werden, wir bleiben daher hier was den Fall a^x betrifft bei dem indirecten Beweise, der seine Fehler misst.

Wir wiederholen das bisher Gesagte. Den einfachsten Fall haben wir eigentlich noch nicht besprochen, nemlich den Fall, in welchem zu einer Variablen x , z. B. zu

$$2, 4, 6, 8, 10 \dots$$

eine Constante, k , z. B. 3, nicht multiplicatorisch, sondern bloß additorisch hinzutritt, z. B.

$$(2, 4, 6, 8, 10 \dots) + 3$$

aber wir sehen leicht, dass die ursprüngliche Bewegung dadurch nicht verändert wird, da das was entsteht: in unserem Falle

$$5, 7, 9, 11, 13 \dots$$

dieselbe Bewegung haben muss, die es vorher hatte, weil

durch eine zu einer Variablen x hinzugefügte Constante nur die absoluten variablen Grössen, nicht aber ihre Bewegungsweise verändert wird. Eine Absolutheit constant addirt verändert nicht die Subtractivität. Die Constante bedingt nur einen andren Anfang der Bewegung, schiebt blos dieselbe Bewegung anderswo hin, ist ein besondrer Fall, Beispiel, der Ordnung, der Gesetzlichkeit, die allgemein in dem variablen Ausdruck sich und alle ihre Grössen setzt. Das Differenzial einer nicht variablen, einer constanten Grösse ist Null, d. h. ihre Variabilität, ihre Bewegung, ihre Subtractivität ist nichts, sie ist ja nicht variabel, sondern constant.

Setzen wir eine Constante dagegen multiplicatorisch, also z. B. drei Mal 2, 4, 6, 8 . . . so heisst dies

$$\text{addirt} \begin{cases} 2, 4, 6, 8, 10 \dots \\ 2, 4, 6, 8, 10 \dots \\ 2, 4, 6, 8, 10 \dots \end{cases}$$

d. h. es ist nun nicht die Constante die zu einer bewegten Variablen addirt wird, sondern der Sich Bewegenden sind mehrere und diese werden nun addirt. Die Multiplication einer einfachen Variablen durch eine Constante zeigt die Anzahl der zu einander zu addirenden einfachen variablen Absolutheiten an, wodurch in dem was entsteht die sämtlichen, vorher vereinzelt, einfachen Bewegungen vereint, oder eine von ihnen so vielmals multiplicirt sich findet, wie die bewegten Absolutheiten multiplicirt worden sind. Dies Gesetz erscheint noch deutlicher, wenn die Bewegungen der mehreren addirten Variablen sich nicht gleich sind

$$\begin{array}{l} u \dots 2, 4, 6, 8, 10 \dots du = 2 \\ t \dots 2, 5, 8, 11, 14 \dots dt = 3 \end{array}$$

dann ist in ihrem Additionsresultat $u + t$ ebenso die Bewegung beider $du + dt$ aber die Multiplication bleibt hier Addition, da die zu addirenden ungleich sind.

Werden mehrere Bewegte aber miteinander multiplicirt

$$\begin{array}{l} \text{Multiplication} \left\{ \begin{array}{l} \dots 2, 4, 6, 8, 10 \dots A \\ \dots 2, 5, 8, 11, 14 \dots B \end{array} \right. \\ \hline \dots 4, 20, 48, 88, 140 \dots \end{array}$$

so ist die Bewegung in dem Resultat der Absolutheiten, die Bewegung in A , so vielmal addirt, als B gross ist, und ebenso die Bewegung in B , so vielmal addirt, als A gross ist. Immer ist also die neue Bewegung eine Addition der alten, aber die Menge der zu addirenden ist hier für zwei Bewegungen zu bestimmen, und die Bestimmung liegt für jede in der Grösse, die die andre hat. Wir wiederholen, dass das Wort Bewegung bildlich ist, dass man dafür das technische Wort Differenzial zu denken hat, welches auch eine Bewegung, aber auch vieles andre bedeutet. Hier erst kann vollständig die Schwierigkeit, die man mit der gewöhnlichen Art des Rechnens, mit dem elementaren Subtrahiren, findet, erklärt werden. Man nimmt die Differenzialrechnung als eine gemeine Subtraction, und benutzt, um zu irgend etwas Subtraktivem zu kommen, im Gebiete des Variablen zwei Fälle der Variablen, degradirt diese also zur Constanten, da sie als Variable nicht zwei Fälle, sondern alle Fälle ist. Dies schadet noch nichts, so lange die Sache einfach bleibt. Aber in der nur ein wenig verwickelt geformten Grösse *ut* ist die der gewöhnlichen Subtraction nöthige Benutzung zweier Stellen schädlich; z. B. $96 - 54 = 42$ entstehe aus zwei Multiplicationen, werde z. B. gedacht als

8 mal 12 Minus 6 mal 9 in dem Beispiel

$u \dots 2, 4, 6, 8, 10, 12 \dots$ worin du die Differenz $= 2$

$t \dots 3, 6, 9, 12, 15, 18 \dots$ worin $dt = 3$

$6, 24, 54, 96, 150, 216$

soll nun die Rechnung sagen, wie aus den Multiplicationen dies wird, so ist sie in Verlegenheit. Die Subtractivität ist in der 6 und 8 zwar gleich, nemlich 2 und in 9 und 12 auch gleich, 3, aber die Absolutheiten sind verschieden; man weiss daher nun nicht, mit welcher Absolutheit ($u = 6$ oder 8) und ebenso $t = 9$ oder 12 die, zwar darin gleichbleibenden, Subtractivitäten sich vergrössern sollen, wenn die Frage sich nicht auf den einzelnen Fall beschränkt. In dem Falle ax ist dies nicht zweifelhaft, weil nur eine Subtractivität vorlag, die mit einer Absolutheit, in der ja die Subtractivität fehlt, sich vermehrte. Wir sehen, dass während in dem Fall ax die Subtractivität adx eine constante, durch das constante a vergrösserte Subtractivität ist, hier das Differenzial selbst auch variabel wird, da es nicht mit a , sondern mit den variablen u , oder t , sich auf variable Weise vergrössert, die Subtraction benutzt also, wenn sie diese suchen soll, mit Unrecht auch jetzt noch zwei Fälle, die sich ja nicht mehr gleichen. Also weil die Algebra zwei Stellen benutzen muss, um beide mit einander subtrahirend zu vergleichen, so muss die Algebra ein falsches Resultat geben, wenn sie allgemein reden will und nicht bloß ein Factor, sondern beide variabel sind. Das Resultat enthält einen Fehler. Allerdings wird dieser Fehler immer kleiner, je kleiner man du und dt oder nur eines von beiden macht, und wird Null, wenn beide oder nur eine von beiden Subtractivitäten zu Nichts wird oder verschwindet. Aber dadurch wird nicht der Fehler in dem Fall ut , sondern der Fall ut verändert nemlich zu at gemacht, in welchem das Differenzial in dem u sich unendlich verkleinert, sich ganz vernichtet, hat. Durch diese Bemerkung muss jeder überzeugt werden, da man sieht, dass jedenfalls nicht einmal du und dt beide zu Null zu machen!! nothwendig ist, sondern dass die Vernichtung

des einen!! genügt. Dadurch wird man wohl geneigt werden, kein Differenzial zu vernichten. Wir wiederholen: dt und du sind Grössen, und deshalb nicht Null, namentlich hier wo von höheren Ordnungen gar nicht die Rede ist doch schon verschieden, was doch zwei Nullen nicht sind, es ist also vernünftiger bei der Wahrheit, dass zwei sogar verschiedne (!) „Grössen“ nicht unmöglicherweise „nichts“ sind, zu bleiben, dt und du von irgend einer Grösse sein und bleiben zu lassen, und nur zu erklären, wie es kommt, dass wenn eine gesuchte Subtractivität sich nicht gleich bleibt, sondern variabel ist, die gewöhnliche Rechnung, welche zwei Stellen benutzen muss, weder für die eine noch für die andre Stelle richtig ist. Die Algebra hatte bisher solche feinere Fragen, bei denen es genau auf die Stelle ankommt, noch nicht zu behandeln. Wie das Nachdenken über die Zahlen dort, wo deren Bedürfniss einfach war, das Subtrahiren erzeugte, und diese Rechnungsart, als zu dem dort vorgesteckten Ziele führend, erkannte, und sie mit dem Namen Subtrahiren benennen liess, so geht das Denken weiter und findet, wenn es Gesetzlichkeiten, die nicht rein arithmetische sind, d. h. in denen während des Wachsens oder Abnehmens der Grad des Wachsens oder Abnehmens sich nicht gleichbleibt, auch subtractivisch, arithmetisch, zu messen hat, dass das bisherige Subtrahiren dazu nicht genügt. Ein neues Nachdenken muss stattfinden, und wir sahen, wie einfach es den neuen Weg zum neuen Ziele findet, wenn man nur statt des alten Subtractionsgedankens den nun nöthigen genaueren feineren Gedanken, mit demselben, oder einem ähnlichen, Wort, unverrückt als Subtractivität im Auge behält, und daneben die Absolutheit der Grössen, in diesem oder einem andren allgemeinen Gedanken, oder Kennzeichen, daneben denkt. Die Differenzialrechnung ist die Subtraction der nicht subtractivisch entstehenden Grössen.

Das Denken hier nicht zufrieden mit der ungenauen Subtraction, verlangt eine weniger ungenaue Regel. Die Logik, das Denken, welches wie immer vorgeht, verjagt hier die Subtraction, die sich mit Unrecht noch immer behaupten will. Sie gilt dort, wo die Ordnung einfach ist, deren Gesetzlichkeit die ist, dass nur ein Fall von einem andren einfach weggedacht werden kann, um das Wachsen dort zu fassen, und dies innerhalb dieser Ordnung thun, diese Methode, heisst Subtraction. Um die nicht so einfach geformte Grösse, z. B. ut , oder x^2 , x^m , a^x u. s. w., subtractivisch zu messen, genügt aber nicht die Bekanntschaft mit der absoluten Grösse in einem und in einem zweiten Fall, und dann Wegzählen des einen vom andern, sondern die Messung wird erreicht durch Fassung dieser Grössen in einem einzigen ihrer Fälle, und Multiplicirung desselben mit der, auf die gewöhnliche Weise in jeder dieser Gesetzlichkeiten findbaren, Subtractivitäten. Es ist bei der so geformten Grösse dieses Verfahren nöthig, und die Differenzialrechnung muss dieses Verfahren lehren. Sie beweist, dass sie (hier) nicht die Subtraction sein kann, und sie beweist, was sie sein muss, indem sie alle Gedanken, die in der Gesetzlichkeit, welche sie behandelt, liegen, in Betracht zieht. Das ist ihr Beweis, wie der Beweis der Subtraction auch nur ist, dass diese alles bedachte, was dort zu bedenken genügte, wo sie in ihrer Sphäre zu Hause ist. Wenn man diese Grundgedanken nicht einsieht, so irrt man sich, und kommt in Verlegenheit, und verfällt in die Ungerechtigkeit, das arme dx die Strafe entbüssen zu lassen, indem man es vernichtet, es als Nichts denkt, während es gross und klein sein kann, und ganz unschuldig ist. Was kann dx es helfen, dass man nicht bemerkt was aus ihm wird, wenn verwickelte Formen auftreten. Es bekommt auch Form, wird xdx , $3xdx$, u. s. w. Die Differenzialrechnung, indem sie dies

bemerkt, erreicht ihren Zweck, welcher ist, nicht verschiedene Entstehungsgesetze, sondern nur Ein Entstehungsgesetz dx anzunehmen, welches verschieden mit dem was es machte multiplicirt sich verstärkend, alles jetzt aus sich entstehen lässt. Wir lernen, dass das, auch die geformten Grössen erzeugt zu haben zwangsweise, aber wohlberechtigt, angesehen werdende, Gesetz dx sich mit dem was es zunächst erzeugt x vermehren muss, um so als xdx , oder als $2xdx$, der Erzeuger neuer Ordnungen zu werden. Es bleibt dx immer eine Grösse. In:

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

ist $dx = \text{Eins}$, oder wenn dx Eins ist, so ist z. B. x , 1, 2, 3, 4, 5 In

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

hat dx den Werth zwei, oder wenn dx zwei ist, so ist x in einem seiner Fälle, wenn die Constante Null ist, 2, 4, 6, 8, ... (oder etwa 3, 5, 7, 9, ... wenn ein anderer Anfang, also Zutritt einer Constanten supponirt wird etc.). In

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots$$

ist dx also 3. In

$$2, 9, 16, 23, 30, 37 \dots$$

ist es also 7 mit dem Anfang 2. In

$$0, \sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{5} \dots$$

ist $dx = \sqrt{5}$ oder vielmehr in

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$$

hat dx wie man will alle jene Werthe, indem man die Subtractivität, in dieser ersten arithmetischen Grundreihe,

oder eigentlich in der allgemeinen arithmetischen Ordnung: $0, d, 2d, 3d, 4d \dots$ zu messen anfangen kann wo man will, und Glieder überspringen und andre Glieder interpolirend erschaffen kann, wie man beliebig will, das Wesentliche ist, dass dx ein sich gleichbleibendes subtractives Erzeugungsgesetz, eine Subtractivität ist, die sich gleich bleibt. Die Differenzialrechnung hat den Gegensatz einer andren Subtractivität in den Potenzen, die sich nicht gleich bleibt, kennen gelernt, deshalb ist es nothwendig geworden, die vorher allein bekannten Subtractionsfälle alle mit einem Zeichen zu fassen, um nur ihr wesentliches Merkmal, dass sie sich gleich bleiben, sich nicht verändern, im Auge zu behalten, dass keine andre Veränderung drin ist, als die, welche durch die beliebige Grösse der Differenz, also durch das beliebig grosse dx hervorgebracht wird.

Sechstes Capitel.

Die höheren Differenziale.

Wir haben jetzt die höheren Differenziale, das zweite, dritte Differenzial u. s. w. zu besprechen. Ihre Nothwendigkeit ergibt sich aus den bisherigen Betrachtungen. In dem Ausspruch des (ersten) Differenzials

$$d(x^2) = 2x dx \text{ oder}$$

$$d(ut) = u dt + t du$$

scheint die Subtractivität sich schon vollständig erfasst zu haben, und dieser Schein galt bis jetzt als die Wahrheit. Aber die Antwort des ersten Differenzials ist in der That eine wesentlich unvollständige. Zur Messung der geformten Variablen ist vor dx ein Coefficient getreten, aber so lange der Coefficient variabel ist, bleibt die Frage nach seiner Variabilität noch immer ein, wenn auch nicht ganz so grosses, doch beinahe ebenso grosses Mysterium, als die Frage vor aller Antwort war. Das erste Differenzial schiebt nur die Antwort von sich. Z. B. das erste Differenzial von x^3 ist

$$3x^2 dx$$

aber dies kann nicht das letzte, sondern nur das erste Wort der Antwort sein, denn es bleibt die Frage nach

dem Differenzial von $3x^2$ übrig. Ich soll die Subtractivität in x^3 (in der Potenz) vergleichen mit der Subtractivität in x , (in der Wurzel), eine Antwort, die mir wieder eine Potenz, x^2 , die also auch eine fraglich bleibende, in bestimmter Weise von der Wurzel verschiedene, Subtractivität hat, hinstellt, kann also nicht auf Vollständigkeit Anspruch machen. Es begreift sich, dass man nur das erste Differenzial des Coeffizienten des ersten Differenzials hinzuzufügen hat, um die Antwort auch zu ihrem letzten Wort zu bringen.

So oft also, als ein Differenzial-Ausdruck noch etwas Variables in sich hat, muss davon die Subtractivität gefasst werden. Dann ist erst das Variable constant gemacht, das Fliessen zum Stehen gebracht, dann erst das Wachsen und Werden in die Sprache des Seins übersetzt (was beiläufig gesagt auch die Aufgabe der Logik oder Sprache ist), dann erst ist also das Variable gemessen, denn was nützt es mir, wenn mir eine Antwort sagt, dx , oder dt , die das Mass sind, sollen zwei oder drei Mal mit x^2 , also mit einer Variablen, multiplicirt werden, da die Variable ja nicht stille hält, und ihre Bewegung also auch mit angezeigt werden muss, wenn ich die Bewegung, die in dem Ganzen ist, begreifen will.

Dass nun, wenn das erste Differenzial ein irgendwie geartetes dx ist, das zweite, falls es in seiner directen Beziehung zu der Function ausgesprochen werden soll, nicht dx sondern dx^2 ist, was man ein Unendlichkleines von höherer Ordnung nannte, statt dass man sagen sollte, dass es kleiner als dx nur dann wenn dx kleiner als Eins, sonst grösser als dx ist, das braucht gar nicht künstlich deduzirt zu werden. Ist nemlich das erste Differenzial z. B.

$$3x^2dx$$

so ist die noch nöthige zweite Antwort nur für den Coefficienten x^2 nöthig, dessen Differenzial $2xdx$ ist, und dieses zweite Differenzial ist also, da es mit dx und 3 zu multipliciren ist, für sich allein betrachtet $6xdx^2$, und das dritte Differenzial ist dann hier $6dxdx^2$, also $6dx^3$, ohne dass ein ferneres Differenzial möglich und nöthig ist, da nun alle Coefficienten ($6, dx, dx, dx$) constant sind. Ebenso ist das zweite Differenzial von ut , da dessen erstes

$$udt + tdu$$

ist, also

$$dudt + dtdu$$

wo nichts weiter zu fragen ist, da alle Coefficienten hier constant sind.

Allerdings hat auch schon der erste Differenzial-Quotient seine Bedeutung für sich, er ist die Tangente der Curve, er ist die Ordinate der Fläche, und der zweite Differenzial-Quotient hat wieder seine Bedeutung allein, wie in der Sprache jeder einzelne Satz seine Bedeutung hat, und doch alle Sätze zusammen erst die ganze (leider nicht ganze) Erkenntniss der Welt ausmachen, und viele andre geometrische und physikalische Bedeutungen und Anwendungen entnehmen sich schon aus dem nur ersten Differenzial allein. Es kommt jedoch darauf an, was man hier fragen will, und will man Alles fragen, was zu fragen nöthig ist, und will man eine vollständige Antwort haben, so liegt diese nicht in einigen, sondern in allen Differenzialen zusammen. Die Frage ist nemlich, wie verhält sich das Wachsen der Function zum Grösserwerden eines Theiles in ihr? Dies kann die verlangte Antwort nicht einfach sagen, weil alle Rechnungsformen dazu in gewöhnlicher Weise, wie immer man sie cumuliren mag, nicht genügen, die Antwort schachtelt daher, so wie in der Vor-

rede zu dieser Abhandlung es schon gezeigt wurde, mehrere Multiplicationen in einander hinein. So giebt die Differenzialrechnung die allgemeine Regel. Kommt es zur Ausführung zur Taylorschen Reihe, so sind die Divisionen hinzuzufügen. Denn da nur wenn mehrere Schritte berechnet werden, eine Aenderung der Schritte stattfinden kann, so muss zu dem Vielfachen des ersten Schrittes, von dem, was für zwei Schritte noch hinzukommend angezeigt ist, etwas — natürlich dessen Hälfte — schon auf den ersten Schritt hinzugerechnet werden. Die Differenzialrechnung macht (zwar keine Schritte, aber denkt sich) Schritte, oder sie steht zwar über dem Beispiel, über dem einzelnen Fall, gestattet aber das Zurückgehen in die weniger allgemeine Rechnungsweise der concreten Realität, wie immer die Regel, das Allgemeine, den einzelnen Fall in sich fasst. Umgekehrt führt die Betrachtung des einzelnen Falls nicht zum Allgemeinen, und die falschen Subtractionen der gewöhnlichen Rechnung führen deshalb nie zur Differenzialrechnung. Alle Differenziale sind also zusammenzunehmen, und ihre Ordnung ist dabei die umgekehrte, das Letzte ist zuerst zu denken, es ist so die Bewegung in

$$utv = d(utv) + d^2(utv) + d^3(utv) + 0$$

und ebenso die Bewegung in

$$x^3 = d(x^3) + d^2(x^3) + d^3(x^3) + 0$$

Vielleicht kann man sagen, das letzte, aber im Gedanken erste, Differenzial (von x^3) ist nicht $6dx dx dx$, sondern nur dx^3 , und das letzte, oder im Gedanken erste, Differenzial von utv ist nicht $6dudtdv$, sondern nur $1dudtdv$, und diese sind die Erzeuger, die Mütter, oder das Werden, das successiv zum Sein wird, die zuerst einen der erzeugenden Factoren aus dem Werden in's Sein, vom Differenzial in's Integral, setzen, und so fortfahren bis zur Vollendung.

Damit ist die Differenzialrechnung beendet. Denn wenn sie die Haupt-Rechnungsarten, die Hauptreihen, x , x^m , und a^x , differenzirt, d. h. ihrer Subtractivität nach verglichen, mit der Subtractivität der einfachsten Reihe x , welche dx ist, gemessen hat, also ihr Sein aus ihrem einfachsten Werden, ihr Integral aus ihrem Differenzial begriffen, und eine Brücke zwischen beiden erbaut hat, so ist die Differenzirung aller denkbaren Functionen möglich gemacht, da alle andren unendlich viele Reihen oder Ordnungen und Gesetzlichkeiten, die in die Vielheit hineingebracht werden können, nur Nebenreihen jener Hauptreihen sind, und aus der Differenzirung der Hauptreihen die Differenzirung aller andren Formen oder Reihen bekanntlich folgt.

Man kann zuletzt alles in dieser Abhandlung Gesagte in einen Satz zusammenfassen: die bisherigen Ansichten von der Differenzialrechnung gingen den Weg der gemeinen Subtraction. Natürlich war, das was ihnen entstand dann nicht das Differenzial, sondern Taylor's Reihe, d. h. alle Differenziale zusammen, was man aber nicht wusste, und deshalb die falsche Theorie vom Unendlichkleinen, und von der Grenzmethode, einführte, um den in Taylor's Reihe eindringenden Reichthum aller Differenziale auf nur das erste Differenzial zu beschränken.

Anmerkungen und Zusätze.

Die Zahlen, die jede
ein von der Eins verschiedenes Zeichen erhalten, waren wir
zu bezeichnen, und der abgekürzte Ausdruck für die mehr
als einemal ausgeführte Operation des Zählens
mit der Eins. In den sogenannten Römischen Zahlen
I, II, III, IV ist der Zähler noch angedeutet, da hier die
Zwei gleichzeitig noch nicht existiert, sondern statt ihrer eine
Wiederholung der Eins geschrieben wird, und die Drei
gleichfalls noch nicht existiert, sondern nur eine mehrmalige
Hinzufügung der Eins ist. Diese Zahlen sind also, wie die
in der Natur vorkommenden, nicht als Einheit, sondern
als eine Reihe von Einheiten zu betrachten, die sich
als eine Einheit darstellen.

Aber wenn gleich die Zahlen die Zahlen nicht ordnen
können, so sind sie doch nach dem Zahlen
ein, oder vielmehr mehrere, mit dem Zahlen, die Zahlen
I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, als Individuen, die von der
Eins, die die ersten sind, trennen. Die Römische Notation
des Gedankens konnte nur gleichsam nicht so

Anmerkungen und Zusätze.

Anmerkungen und Zusätze.

Aus der Eins und dem unbestimmten Begriff der Vielheit entsteht das Zählen, d. h. die Wiederholung der Eins, um die Ordnung der Eins in die Vielheit zu bringen. Wir zählen nur mit der Eins. Die Zahlen, die jede ein von der Eins verschiedenes Zeichen erhalten, woran wir sie erkennen, sind der abgekürzte Ausdruck für die mehr oder weniger ausgeführt gedachte Operation des Zählens mit der Eins. In den sogenannten Römischen Zahlzeichen I, II, III, IIII ist das Zählen noch anschaulich, da hier die Zwei gleichsam noch nicht existirt, sondern statt ihrer eine Wiederholung der Eins geschrieben wird, und die Drei gleichfalls noch nicht existirt, sondern nur eine nochmalige Hinzufügung der Eins in dem Zeichen sich so zeigt, wie sie in dem Gedanken des Zählens stattfindet. Wiederholung ist also die erste — und bleibt die letzte — Methode der Mathematik.

Aber wenn gleich zum Zählen die Zahlen nicht erforderlich sind, so entstehen doch unmittelbar nach dem Zählen, oder vielmehr sogleich mit dem Zählen, die Zahlen d. h. die 2, 3, 4, u. s. w., als Individuen, die von der Eins, die sie erzeugte, sich trennen. Die Römische Steifigkeit des Gedankens konnte nur gleichsam nicht so

schnell und leicht den neuen Gedanken, von dem Ursprung, den er hatte, lostrennen. Es gehörte Genialität dazu, so nahe an der Eins gleich der Zwei u. s. w. ein besonderes Zeichen zu geben, und zu schreiben 1, 2, anstatt I, II. Die Zahlen ausser der Eins haben also nur die Bedeutung, dass man die verschiedenen Stadien, zu welchen die Eins durch Zählen successive gelangt, für sich betrachtet.

Es bedurfte einer noch grösseren Genialität, um der Individualisirung zur rechten Zeit Halt zuzurufen, und nach einigen Zeichen wieder zur Eins sich zurück zu wenden, wieder an die Eins zu denken und zu schreiben 11, 12. Unser dekadisches Zahlzeichensystem, mit neun, oder, wenn man die Null mit zählt, zehn, Zahlzeichen, ist bekanntlich nur eines von unendlich vielen die möglich sind. Hätte man nur ein (oder mit der Null zwei) Zeichen, so würden im „Unalsystem“ die Zahlen z. B. wie folgt zu bezeichnen sein:

Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
1	10	11	100	101

Ein Zahlssystem ist nemlich seinem Wesen nach eine Bezeichnungsart, in welcher der Ort, wo die Zahl steht, als ein Nebenhülfsmittel zur Erreichung des Zweckes zur Bezeichnung der Zahlen benutzt wird, in welchem also der Mittel zur Bezeichnung der Zahlen zwei sind, einmal das absolute Zeichen, und zweitens „die Stelle“ in welcher ein Zeichen in Beziehung auf ein andres bemerkt wird. Der Raum kommt hier mit seiner Gesetzlichkeit mit seinem System, dem Zahlssystem zur Hülfe, die Geometrie leiht ihre Begriffe den Zahlen, sie gestattet gleich hier, wie sie oft thut, dass ihre grössere Anschaulichkeit zur Darstellung der abstracteren nackten Zahlengesetzlichkeit benutzt werde.

Der Raum, an welchem keine Zahl steht, wird nun auch, etwa durch einen Punkt, bezeichnet, und das Zeichen für diesen Raum ist die Null, ein Punkt, der nur zum Kreis geworden. Nach den Zeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 heisst nun 1 • (oder 10) Zehn, 1 • • (oder 100) Hundert, 1 • • • Tausend etc. 2 • • • Zweitausend u. s. w., und die Lücken zwischen Zehn Zwanzig (1 • und 2 •) so wie zwischen 2 • und 3 • lassen sich dann auf die bekannte Weise durch Hinwegnehmen der Null und Hinschreibung der Zahlen an den Ort wo vorher Punkte standen ausdrücken.

Wie sehr hier die Stelle gleichsam an Wichtigkeit zunimmt, je öfter ihr System sich wiederholt, ist bekannt, in der siebten Stelle bedeuten unsre Zahlen schon Billionen. Selbst mit nur einem Zeichen und der Null wächst die Wichtigkeit der Stellung.

Die ersten sechzehn Zahlen des Systems, das wir „Unalsystem“ nannten, sind:

Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf	Sechs	Sieben	Acht	Neun	Zehn
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
Elf	Zwölf	Dreizehn	Vierzehn	Fünfzehn	Sechzehn				
1011	1100	1101	1110	1111	10000				

Die Eins muss hier um nur die Zwei zu bezeichnen, schon eine neue Stelle einnehmen, gleichsam einen neuen Rang empfangen, oder eine neue „Ordnung“ einführen. In dieser zweiten Stellung oder Ordnung liegen dann aber zwei Zahlen, die Zwei und die Drei, (10, 11), dann beginnt die dritte Ordnung, in welcher vier Zahlen sind: die vier (100), die fünf (101), die sechs (110), und die sieben (111), in der vierten Ordnung liegen dann acht Zahlen. In der *n*ten

Ordnung ist die Anzahl der Zahlen 2^n wie in unsrem Decimalsystem in der fünften Ordnung die Anzahl der darin bezeichneten Zahlen 10^5 d. h. 100,000 Zahlen sind. Alle diese Systeme nennt man mit Unrecht Zahlensysteme, sie sind Zahlzeichensysteme. Unser dekadisches Zahl- oder Zahlzeichensystem ist den Anforderungen, die man an ein solches zu machen hat, ganz gut genügend, weil es zuerst (gleich nach der Eins) die Berechtigung jeder Zahl zu einem individuellen Zeichen anerkennt, dann aber, nachdem dieser Gedanke hinlänglich gesichert ist, an ihm nicht hartnäckig festhält, sondern den Gedanken der Eins und ihrer Wiederholung schon bald zurückruft, diesen nicht vergessend, der ebensowahr ist als der der Zahl, und ihr zum Grunde liegt.

Durch Zählen sind wir also zur Zahl gekommen. Das Zählen sollte man eine Rechnungsart nennen. Doch gewöhnlich hält man die Addition für die erste „Rechnungsart“, für die erste der vier Species. Man lernt nemlich, dass es vier Species, oder Rechnungsarten, giebt: die Addition, die Subtraction, die Multiplication, und die Division. Man will dadurch sagen, dass es diese vier elementaren Arten im Rechnen giebt, während andre Rechnungsarten, die Potenzirungen und Wurzelziehungen, als nicht elementare Rechnungsarten, als höhere Formen nicht mitgezählt werden.

Die erste elementare Rechnungsart, da das Zählen wodurch die Zahl entstand nicht zu den Rechnungsarten gezählt wird, ist also die Addition. Sie ist nur Zählen, und doch davon verschieden, nemlich sie ist ein Zählen, dessen Anfang eine bestimmte, durch ursprüngliches Zählen schon erreichte, Zahl ist, und dessen Ende gleichfalls bestimmt ist, zwar nicht durch die Zahl die endlich erreicht wird, sondern durch Angabe der Zahl, welche erreicht werden würde, wenn von der Eins an ursprünglich

gezählt würde. Z. B. zu 7 addire 5, heisst, beginne zu zählen nicht von der Eins, sondern von der durch ursprüngliches Zählen schon erreichten Zahl 7, und zähle von dort an so viel weiter, als wenn Du beim ursprünglichen Zählen die 5 erreichen wolltest: Zähle fünf! aber hinzu zu sieben d. h. zähle sieben und fünf.

Hier entwickelt sich zuerst der Gedanke einer Aufgabe und ihrer Lösung. Es ist ganz einerlei, ob mir gesagt wird: zähle zwölf, oder zähle fünf und sieben (zähle fünf hinzu zu sieben), dennoch gilt jenes als Aufgabe und dies als Lösung. Wir haben schon früher gesehen, dass die Aufgabe nur die irgendwie verwickeltere Form, die Auflösung die leichtere, einfachere, Form ist, bis dieser Gedanke und Gegensatz, als unberechtigt und unbedeutend in den Hintergrund tritt und ganz verschwindet. Wenn es keine verschiedene Zeichen gäbe, kein Zahlzeichensystem, also wenn nur die elementare Bezeichnung jeder Zahl durch die Eins angewendet werden dürfte, so würde die Aufgabe, zu 7 addire 5, oder zähle sieben und fünf, der Auflösung noch näher liegen. Die Aufgabe der Addition zeigt sich dann ganz in ihrer Naivität und Einfachheit, nemlich:

Aufgabe

Zähle ||||| und ||||| und die

Auflösung

zähle ||||| |||||. Man sieht, dass der Unterschied nur darin liegt, dass die Aufgabe eine Pause macht im Zählen, die dort erreichte Zahl als Einheit denkt, als Individuum fixirt, ebenso den zweiten Abschnitt des Zählens als Individuum betrachtet, aber die Forderung enthält, und zwar nur diese, dass keine Pause gemacht werde, dass nicht

mehr ein Individuum diesseits und ein andres jenseits der Pause existire, sondern Alles gleichmässig fliesse, die erste einfachste Ordnung hergestellt werde.

Verweilen wir hier einen Augenblick bei dem Begriff der Einheit. Wenn ein Kind nach allen nahen und entfernten Gegenständen gleichmässig greift, weil sie ihm alle gleichmässig auf dem Auge liegen, und es eine Entfernung (Raum, geometrische Gedanken) noch gar nicht ahnet, dann hat es doch schon eine Erfahrung gemacht, nemlich die, dass es einzelne Gegenstände sind nach denen es greift. Der Begriff Einheit ist dem Kinde dann schon klar geworden, denn in noch früherer Kindheit greift die Hand nicht nach einzelnen Sachen, die alle zusammen wie ein All auf dem Auge des Kindes liegen. Wäre keine Bewegung in der Welt, der Mensch selbst wie ein Baum festgewurzelt, so würde ihm die Erfahrung, dass irgend etwas eine Eins sei, sehr erschwert sein, da sich kein Gegenstand von dem Hintergrund des Gemähltes lostrennen würde. Die Bewegung ist es, die der Anschauung zur Hülfe kommt. Wenn Kinder um einen Baum herum abwechselnd sich einander zeigen und sich dann wieder vor einander verstecken, so empfinden sie, oder erinnern sie sich an diese ersten Freuden der Kinder, denen die Einheit des sich abwechselnd durch schnelle Bewegung versteckenden und dann wieder erscheinenden einen Gegenstandes, durch die Abwechslung durch die Bewegung des Gegenstandes, empfindlich wird. Es ist als ob das lachende Kind sagte: es ist wirklich hier Etwas für sich, denn bald ist es hier und bald ist es da, und der Baum ist auch, wie freut es mich diese Erfahrungen zu machen, oder mich darin zu befestigen. Selbst dem Thiere, dem Hund, ist der geworfne, der bewegte Stein, wichtiger als der nicht bewegte, er läuft dahin, wohin der Stein fiel, er apportirt ohne dass man ihn dieses Kunststück zu lehren

braucht. Dieser Ort, dieser Stein ist ihm als Eins in dem Vielen ausgezeichnet. Was sich nicht bewegt existirt gleichsam gar nicht, um uns von dessen Existenz zu überzeugen, müssen wir uns unsrerseits erst bewegen, wodurch eine scheinbare Bewegung in die Gegenstände kommt, die ihre relative Stellung zu einander verändert haben, und so sich von dem Hintergrund lostrennen, und als selbstständige Individuen, als Einse, erscheinen. So wird die Einheit, die Eins, geboren, und ihr Gegensatz, der mit ihr geboren wird, ist das All. Wir sehen hier, dass der erste Gegensatz vielleicht nicht eigentlich, der zwischen dem Eins und dem Vielen ist, wie wir annehmen, sondern zuallererst ein Gegensatz zwischen der Einheit und Allheit, aber indem die Eins es unternimmt die Allheit zu messen, und ihre Ordnung in sie zu bringen, durch gleichmässige Wiederholung der Eins, durch das Zählen, beseitigt sie somit gleichsam den Begriff der Allheit, fasst sie nemlich (berechtigt oder unberechtigt) als Vielheit. Wir irren uns vielleicht, wenn wir glauben, durch die Eins das ganze All in Vielheit auflösen zu können, die ganze Arithmetik ist aber jedenfalls auf diesen Irrthum als auf ihr Axiom gebaut, dass das All Vielheit sei $1 + 1 + 1 \dots$ etc. in infinitum. So ist das All oder die Vielheit geordnet durch das Zählen. Diese Ordnung des Zählens beschaut der Geist von verschiedenen Seiten, er beschaut, wie wir gesehen haben, die Ordnung des Zählens zuerst indem er darin Pausen macht, und das Gezählte als Individuum als Zahl, fast wieder als Einheit, betrachtet und festhält. Nachdem die Zahl so entstanden ist, vernichtet der Gedanke sie wieder, indem er die erste Rechnungsart, die Addition, das Hinzufügen der einen Zahl zur andren, lehrt, aus zwei Zahlen wieder eine machend, die einfache Ordnung des Zählens, die er durch Festhaltung von Pausen, d. h. durch Individualisirung von Zahlen,

also von dem besondern Gesichtspunct des Einhaltens aus beschaut hatte, nun, in der Addition, wieder von dem entgegengesetzten Gesichtspunct betrachtend, scheinbar zurückfallend in dieselbe Erkenntniss, in Wahrheit aber fortschreitend, denn das Zurückgehen zum Zählen, nachdem aus dem Zählen (zuerst) die Zahl geworden war, ist eine andre, eine klarere, eine entwickeltere, Einsicht in die Gesetzlichkeit, die betrachtet wird, d. h. in die Ordnung, die beschaut wird, als das unvermittelte Zählen. Die Subtraction ist dann ein Zurückgehen, ein Beschauen der Ordnung von einem neuen Gesichtspunct, der zu dem Gesichtspunct der Addition das Verhältniss des blossen Gegensatzes bildet. Von zwölf subtrahire fünf, d. h. denke dass du addirt hättest, d. h. dass du statt ununterbrochen bis zur Zwölf zu zählen eine Pause bei der Fünf gemacht hättest, wo liegt dann, fragt die Subtraction, in der Ordnung die du beschaut die andre Pause? Natürlich wird die Ordnung auch hierdurch besser tiefer erkannt. Die Subtraction ist nur ein Zurückgehen des Wegs den die Addition hinging, oder ein aus dem Spiegel zurückgeworfenes, also ein umgekehrtes Bild, aber wie der Maler sein Bild gerne einmal umkehrt, das unterste zu oberst stellend, um die Aehnlichkeit des Gegenstandes und die Richtigkeit der Schatten in dieser unnatürlicheren Stellung zu erproben, so ist der Geist noch mehr befestigt oder gesichert über die Natur der Ordnung, die er in die Vielheit brachte, wenn er nach der einfachen Erfahrung darüber, wie die Ordnung sich darstellt wenn Pausen gemacht, (d. h. Zahlen gesetzt), und dann die Pausen wieder weggewischt werden, (d. h. Additionsexempel gelöst werden), nun zur Umkehrung dieser Erfahrungen in der Subtraction fortschreitet, das Machen und Wegdenken von Pausen als geschehen denkend, und von dem einen auf das andre in ungewöhnlicher Reihenfolge schliessend.

Besonders diese letztere Ansicht, die der Subtraction, ist fruchtbringend, und von Folgen begleitet, denn sie führt auf die Null, auf die die Addition nicht (direct) führt. Wenn wir von fünf^{en} fünf hinweg denken, so giebt uns die Antwort die Null. Noch ferner giebt uns dieser Gedanke die negative Zahl, eine Entdeckung die eine neue Welt von Gesetzlichkeiten neben der schon bestehenden hervorruft, denn wenn ich zu 12 hinzuaddire 8 und davon abziehen kann 17, so muss ich auch, sagt sich der Geist, von 12 zuerst abziehen können 17, und acht hinzulegen: denn ich thue in beiden Fällen beides, nur dass ich in dem einen Fall die Subtraction, in dem andren die Addition zuletzt vornahm. Kann ich aber dies, so kann ich auch noch vor der letzten Addition eine Pause, nach der blossen Subtraction, machen, und beschauen was ich in diesem Augenblick vor mir habe. Dies ist $12 - 17$, oder zwölf abzüglich siebzehn, und wenn ich die zwei Pausen, die 12 und die 17, hier verwischen will in eine, so entsteht die negative fünf d. h. so muss ich zurück nicht bloß zur Eins und zur Null, sondern noch über diese hinaus, und dort liegt, wie ich bald sehe, eine ganze (neue) Welt von derselben Gesetzlichkeit, wie ich sie diesseits schon erkannte. Wie die positive Zahl aus einem Anhalten beim Zählen entstand, so entsteht also auch die negative Zahl durch ein solches Anhalten.

Bei einigem Nachdenken werde ich mir sagen, dass diese neue Welt, die negative Zahl, nicht reell ist, dass sie nur imaginär ist, d. h. dass ich nur vorübergehend in das Gebiet dieser Gesetzlichkeit hineingehen darf, dass noch ein Addiren hinzukommen muss, wenn mein Subtrahiren mich in jenes Gebiet einen Augenblick hineinführt. Es ist bekannt, dass wenn ich die Aufgabe stelle: Ein Bauer hatte zwölf Kälber, er kaufte noch ferner fünf, und

verkaufte nun ein und zwanzig, wie viele Kälber hatte er nach diesem Verkauf? worauf die Antwort sein müsste minus vier; dass dann die Frage wie die Antwort gar nichts sagen, da minus vier Kälber, oder nur ein minus Kalb oder Thier nicht in der ganzen Welt ist. Wenn gleich dies im Allgemeinen richtig ist, so entwickelt sich doch aus dem Begriff der negativen Zahl hier leicht ein neuer logischer Gedanke, nemlich der, dass einige Aufgaben aber keineswegs alle, wie man zu lehren scheint, in doppeltem Sinne verstanden werden können, im negativen und positiven. Ist in solchen Fällen die Antwort auf die Frage schliesslich eine negative Zahl, so heisst dies dann nicht, die Aufgabe und die Auflösung sind unsinnig, und bedeuten nichts, sondern es folgt aus der schliesslichen negativen Zahl nur, dass die Frage auch jetzt noch, aber in dem andren Sinne, zu verstehen ist. Z. B. auf die Frage wie viel Vermögen hat der Kaufmann, der 12 Thaler an baarem Gelde hat, der 16 Thaler noch zu fordern hat, und der 30 Thaler schuldig ist? wird die Antwort minus zwei, und sagt dadurch, dass die Frage, wie reich ist der Kaufmann, nur richtiger hier allgemeiner, hätte lauten können, und deshalb vorsichtiger Weise hätte lauten müssen: wie reich oder wie arm ist er, d. h. hat er Vermögen oder hat er Schulden? Die Antwort sagt mir dann, dass in diesem Falle er kein Vermögen sondern Schulden, zwei Thaler Schulden hat. Die Mathematik lehrt uns hier Logik, wie sie häufig thut. Die Lehre die hier gegeben wird ist die, dass Gedanken die ihr Gegentheil haben, was Hegel mit Unrecht von allen Gedanken annahm, einen allgemeinen Gedanken über sich zulassen, der sie beide enthält, und dass eine Frage einseitig und zu eng gestellt sein kann, wenn sie in solchem Falle nicht an dem höheren Gedanken, sondern an einem der (beiden) niedrigeren sich festhalten, sich orientiren will.

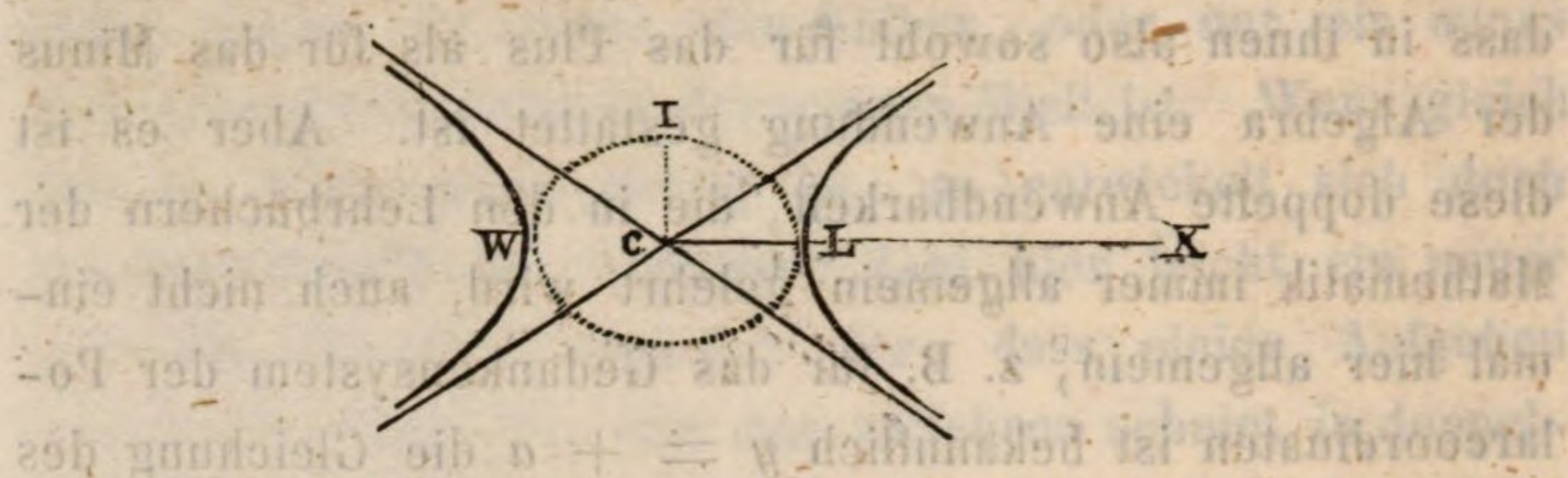
In der Regel sind die als Anwendungen der abstracten Algebra uns zunächst interessirenden räumlichen Fragen alle von der Art, dass sie einen Gegensatz haben, dass in ihnen also sowohl für das Plus als für das Minus der Algebra eine Anwendung gestattet ist. Aber es ist diese doppelte Anwendbarkeit, die in den Lehrbüchern der Mathematik immer allgemein gelehrt wird, auch nicht einmal hier allgemein, z. B. für das Gedankensystem der Polarcoordinaten ist bekanntlich $y = +a$ die Gleichung des Kreises. Hier ist $y = -a$ ein Unding. Bei Polarcoordinaten hat nur die positive Lösung die fragliche geometrische räumliche Bedeutung. Werden wir also in einer Rechnung, die den Radius Vector zu bestimmen hat, auf Fälle wie $y^2 = a^2$ geführt, wo $y = \pm a$ zwar algebraisch folgt, so müssen wir die negative Wurzel wegwerfen. Also auch in der Geometrie steht dem $+$ ein $-$ nicht immer, sondern nur bisweilen gegenüber, nemlich in der Geometrie und auch ausserhalb der Geometrie nur da, aber auch überall da, wo dem Positiven die Bedeutung durch das gewählte System des Denkens gegeben wird, dass dieses nur die eine Seite eines Ganzen, welches zwei Seiten hat, in sich fasst.

Die negative Zahl ist also nicht immer reell, sondern bisweilen „imaginär“.

Gewöhnlich nennt man, ohne das Gesagte zu bedenken, die negative Zahl, also die Minus-Zahl, reell, und nennt nur die Quadratwurzel aus der Minus-Zahl ($\sqrt{-4}$,

oder $\sqrt{-a}$, und allgemein $\sqrt[2n]{-a}$) imaginär. Auch dies ist falsch. $\sqrt{-a}$ ist nur bisweilen imaginär. Z. B. die Gleichung der Hyperbel, aus dem Centrum C , für Parallel-Coordinaten ist (in dem Falle der rechtwinkligen Asym-

toten, welchen Fall wir hier der Leichtigkeit wegen in der Formel supponiren) $y = \sqrt{x^2 - a^2}$



x und y sind hier variabel oder unbestimmt, aber a ist constant $= CL$, und x darf, so lehrt unsre Formel, $\sqrt{x^2 - a^2}$, nicht kleiner werden als a , weil sonst eine Quadratwurzel aus einer negativen Grösse entstehen würde, also etwas Imaginäres, d. h. wie man glaubt, Etwas was unmöglich sein würde. Mit andren Worten, obgleich bei C als dem Nullpunkt des x das Wachsen des x beginnt, so giebt es (reelle) y , also $\sqrt{x^2 - a^2}$, erst von L an. Bei L fängt erst die Hyperbel an, und nur wenn x über die Null hinaus gehend wieder kleiner als $-a$ wurde (wenn x rückwärts in der Figur in dem Punkt W anlangt), erst dann wird die Hyperbel dort wieder reell, weil die hier fragliche Potenz, das x^2 , sich zwar verkleinert, wenn x abnimmt bis zur Null, sich aber wieder vergrössert, wenn x über Null hinaus noch mehr abnimmt, weil $(-x)^2$ eine positive Grösse wird, da der Gegensatz eines Gegensatzes (oder ein Gegensatz, mit sich multiplicirt) wieder dasjenige, d. h. hier also positiv (und sich vergrössernd) werden muss, wovon es der Gegensatz war.

Also innerhalb der Grenzen $x = +a$ bis $x = -a$ giebt es keine Hyperbel, und man lehrt, dass die Gesetzmässigkeit

$$y = \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

innerhalb jener Grenzen imaginär sei, d. h. räumlich u. s. w. nicht existire.

Dies ist falsch, denn innerhalb dieser Grenzen zeichnet die Formel, wenn man ihre imaginären Werthe beachtet, zwischen L und W räumlich die Ellipse, oder in diesem Falle den Kreis *).

Die Gesetzlichkeit der Ellipse ist:

$$y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{b^2}\right) x^2}$$

wo a die halbe kleine Achse, und b die halbe grosse Achse ist, oder für unsren Fall, wo die Ellipse Kreis ist

(wo $\frac{a^2}{b^2} = 1$ gedacht ist)

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

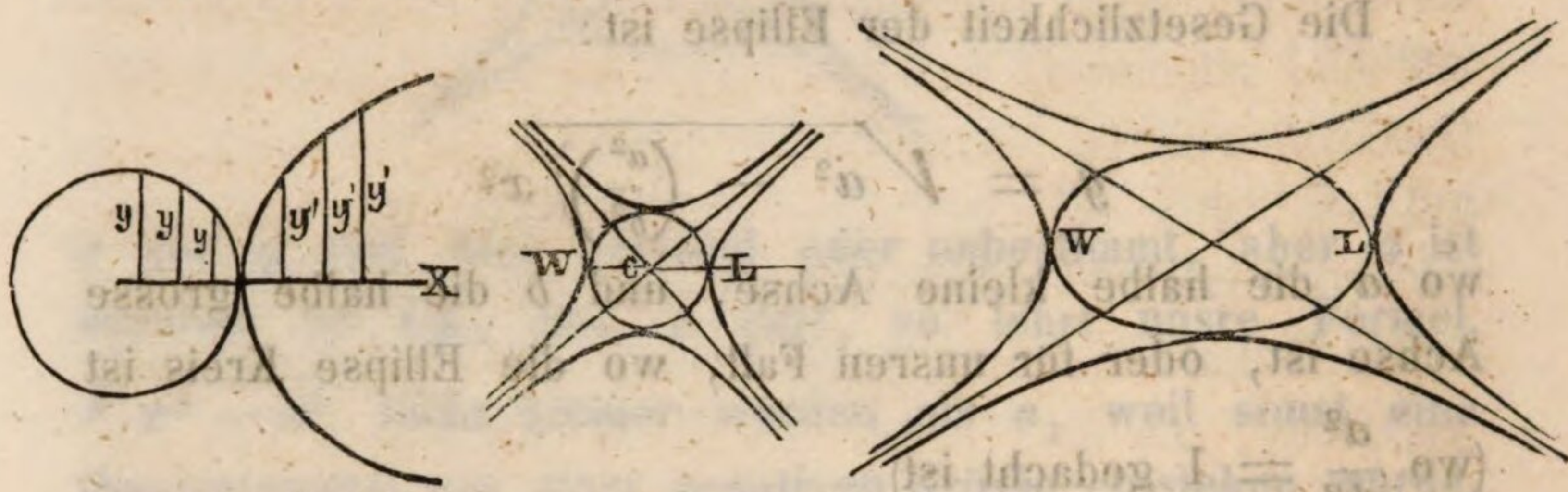
während die Gesetzlichkeit, welche Hyperbel heisst, in der Formel

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

gegeben war. Diese letztere Formel, also die Hyperbel, giebt nun in den Fällen derselben, die man imaginär nennt,

*) Francoeur lehrt (Cours Nr. 388): Cherchons l'ordonnée imaginaire d'une hyperbole, $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, pour le centre, pour le point C , en faisant $x = 0$, elle est: $y = a\sqrt{-1}$, si l'on rend cette quantité réelle, en changeant le signe sous le radical: $y = a$ sera ce qu'on nomme le demi second axe de l'hyperbole; c'est l'ordonnée centrale rendue réelle. — — En comparant les équations de l'ellipse et de l'hyperbole on observe, que la 1^{re} devient la 2^{de} en changeant a en $a\sqrt{-1}$. Ce simple artifice de calcul suffira pour traduire les résultats algébriques obtenus pour l'une en ceux qui conviennent à l'autre. Wir haben Francoeur's allgemeine Formel $y = \sqrt{k(x^2 - a^2)}$ auch hier specialisirt zu unsrer Formel $y = \sqrt{(x^2 - a^2)}$.

die zu ihr gehörende, ausserhalb ihrer zu denkende, Curve, Ellipse oder Kreis, und umgekehrt giebt jede Formel der Ellipse, oder des Kreises, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, in ihren Imaginär-Fällen, die ja auch eine Gesetzlichkeit befolgen, die zu der Ellipse gehörenden, an beiden Seiten neben ihr zu denkenden Hyperbelpaare. Die Zeichnung



macht deutlich, dass während y^2 im Kreise wegen des Pythagoreischen Satzes gleich a^2 , (dem Quadrat des Radius), abzüglich x^2 ist, was die Formel $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ oder $y^2 = a^2 - x^2$ besagt, dies auch noch irgend eine Figur zeichnen muss für die Fälle von $(y')^2$, wo x grösser als a wurde, und in irgend einer Gesetzlichkeit immer mehr wächst. Diese Figur ist nun die Hyperbel, oder zwei Hyperbelpaare, da ihrer, wie dies auch anschaulich gemacht ist, vier um einen Kreis zu denken sind, die die Gesetzlichkeit des Kreises negativ nachahmen, das Centrum des Kreises zu ihrem Centrum habend. Dasselbe gilt von der Ellipse, die auch durch vier Hyperbeln ihre Gesetzlichkeit fortsetzt, sich in die Unendlichkeit hineinzeichnend. Also die negative Ellipse, oder die Nicht-Ellipse, oder die Formel derselben in ihren imaginären Werthen, ist hier noch etwas, nemlich die durch diese Gesetzlichkeit in deren Imaginär-Werthen sich zeichnende Hyperbel, und die Hyperbel ist in ihren Imaginärfällen die zu ihr noch hinzugehörnde Ellipse oder Kreis. Die sogenannte „demi-seconde axe“ der Hyperbel, und die andren Imaginären-

Fälle jeder Hyperbel innerhalb der Grenzen $x = +a$ bis $x = -a$, sind also auch etwas, nemlich sie haben, (gegen die Erwartung), eine ebenso sehr wie alle reellen Werthe bestimmte räumliche Bedeutung. Sie sind also hier nicht „imaginär“, sondern gleichfalls reell. Andererseits ist, wie wir früher gesehen, schon eine einfach negative Grösse nicht immer reell, sondern bisweilen imaginär.

In Wahrheit ist eigentlich jede Zahl „imaginär“, denn es giebt nichts auf der ganzen Welt, was nur 7 oder 13 wäre, da Alles was existirt immer noch andre Eigenschaften hat, und eine Zahl nur eine Imagination, ein Gedankending ist. Zu bemerken ist hier also nichts als dies,

dass einige Zahlen, oder Zahlgedanken ($\sqrt[2n]{-a}$) in einigen Fällen, was man ebenso auch von $(-a)$ sagen kann, imaginär bleiben, nicht angewandt werden können, weil die Algebra allgemeiner ist, als ihre Anwendungen. Immer reell oder immer anwendbar, weil man sonst eben überhaupt gar nicht rechnen würde, ist die positive Zahl $(+a)$, die negative $(-a)$ ist dann (oder bleibt, wie man richtiger sagen sollte) dann manchmal nur imaginär, aber immer „imaginär“ ist keine, auch nicht $a\sqrt{-1}$.

Logisch kann man allgemeiner ähnliche Gedanken erwecken, wenn man z. B. einerseits die Realität Mensch, und andererseits den Gedanken Nicht-Mensch denkt. Dieser Gedanke existirt nicht, denn wir können nicht sagen, was dies (Nicht-Mensch) ist, ob Thier, oder Pflanze u. s. w., da dieser blos negative Begriff alles sein zu können scheint. Ueberhaupt hat kein Organisches, so scheint es, einen Gegensatz, was die berühmteste neuste Philosophie übersah alles categorisirend, und seinen Gegensatz (angeblich) denkend. Denn dass vielleicht höhere Wesen oder Gott, die den Menschen ganz verstehen, auch den Begriff Nicht-Mensch klar sehen würden, und ihm Realität

unterlegen, ist schwer zu denken, da denken wesentlich dies nicht erreicht. So können wir geometrisch oft nicht sagen, was eine algebraische Gesetzlichkeit, (ein Zahl-Organismus), dessen „reellen“ Werthen wir geometrisch positiv beliebig irgend eine Bedeutung geben, dort, wo dessen Werthe $\sqrt[2n]{-a}$ werden, ist, weil dies oft nur Nichts ist, und dass es das Nichts einer besondern Gesetzlichkeit ist, zu seiner Bestimmung nicht genügt (wie auch der Begriff Nicht-Mensch nicht genügt, obgleich wir das Nicht eines besondern Etwas setzen). Aber unser obiges Beispiel lehrt, dass dies nicht immer der Fall ist, denn eine Nicht-Hyperbel, die doch nur das Nichts der Hyperbel ist, zeichnet etwas Bestimmtes, nemlich die dazugehörige Ellipse, und ebenso umgekehrt zeichnet die Nicht-Ellipse eine Curve als Hyperbel. Francoeur's in der obigen Note citirte Ansicht ist: on doit changer l'ordonnée imaginaire, $a\sqrt{-1}$, en a , pour la rendre réelle, es wird par un petit artifice de calcul, die elliptische Gesetzlichkeit zur Gesetzlichkeit der Hyperbel. Wir können diese Betrachtungsweise nicht gut heissen, denn wie darf man eine Formel ändern? Francoeur und die neueren Geometer wollen hier und überall, wir begreifen nicht warum, nicht sagen, dass ein oft Imaginäres ($\sqrt{-a}$) reell sein kann, und machen lieber un petit artifice de calcul, dessen Unmöglichkeit kaum geringer ist, als die der infiniment petits. Einige Geometer sagen erklärend, z. B. $\sqrt{-4}$ oder allgemein $a\sqrt{-1}$ müsse man laterale Zahlen nennen. Es liegt darin ein geometrischer Gedanke versteckt, und wohl dieser, dass die positiven Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . in einer Reihe stehn, an der einen Seite der Null, (und die negativen Zahlen in derselben Reihe an der andren Seite der Null), und dass im Verhältniss dazu dann die imaginären

Zahlen ($\overline{+} a \sqrt{-1}$) in lateraler Richtung zu denken sind, also schief (oder perpendicular) winklig über jener Reihe (und unterhalb derselben) sich erstreckend. Ohne hier auf einiges, was bei der Erwählung jenes Wortes noch mitbestimmend gewesen sein kann, einzugehen, müssen wir jener Betrachtungsweise doch insofern den Boden bestreiten, als darauf zu bestehen ist, dass die Ordnung, welche durch die Eins in die Vielheit gebracht wird, die die Zahlen hervorbringt, nur zufällig in Gestalt einer Linie „geschrieben“ wird. Wir schreiben auf einer Ebne auf dem Papier, und wie dabei unsre Buchstaben eine Reihe bilden, so setzen wir auch die Zahlen in solche Reihe, aber die Zahl hat mit dieser Ordnung oder Reihe nichts zu thun. Schreibe ich die Zahlen $|$; $|$; $|$; $||$; $|||$ etc. anstatt I, II, III, IIII, IIIII, so sieht man schon, dass in der fünf die Vielheit sich fast natürlicher um ein Centrum herum gruppiert, (in der planimetrischen Schreibart $|||$) als in der linearen Schreibart IIII. Denkt man sich statt dessen die vier Ecken eines Würfels als die vier Punkte oder Stellen für die Zahl 4, so würde die Zahl darin stereometrisch (nicht mehr planimetrisch) geschrieben sein, und wenn nothwendig eine räumliche, geometrische, Anschauung zu der Zahl hinzukommen müsste, so ziehe ich für meinen Theil die stereometrische Gruppierung als geometrisches Sinnbild der Vervielfältigung vor, weil doch gar kein Grund einzusehen ist, weshalb man von drei rechtwinkligten Dimensionen des Raumes eine weglassen, und in der planimetrischen Anschauung bleibend, von zwei ihrer Dimensionen dann wieder eine wählen sollte. Die Extreme sind einerseits der Raum mit drei (rechtwinkligten) Dimensionen, will man diesen nicht zum Symbol für die Zahl behalten, so ist nicht einzusehen warum man in

der Abstraction bei der Linie einhält, in sie die Zahl hindenkend, und warum man nicht in dem Abstrahiren bis zum Extrem, zum Punkte, fortschreitet, und in ihm die Zahl denkt. Die Eins, Zwei, Drei und alle Zahlen müssen in der That alle in demselben Punkt existirend gedacht werden, jede andre Ansicht bringt die Geometrie in die Arithmetik hinein, welche doch von jener sich freihalten muss. Die Eins und jede Zahl ist so abstract oder imaginär, dass sie gar nicht im Raum ist, was sich practisch zeigt, wenn eine Succession, also die Zeit, durch die Zahl bezeichnet, oder geregelt und gemessen wird, wo die Möglichkeit oder doch die Nothwendigkeit einen Raumgedanken bei der Zahl zu haben, hinwegfällt. Die Eins und die Zahl ist also nicht räumlich. Sie ist aber auch nicht zeitlich: die Zwei ist nicht eine Succession von einer Eins zu einer andren hin, sondern beide sind gleichzeitig. Die zweite Eins ist nicht verschieden von der ersten, keine der beiden will die zweite sein, sie haben beide gleiches Recht. Die Zahl ist theoretisch früher, als jeder Zeitgedanke, oder Raumgedanke. Ist aber die Zahl abstracter als Zeit und Raum, und müssen wir jede lineale Darstellung und den Gedanken an eine Reihe, zu dem das Wort Zahlenreihe verleiten will, aufgeben, müssen wir bei der Zahl alle zeitlichen und räumlichen, also überhaupt alle, Bilder, denn jedes Bild ist zeitlich, oder räumlich, oder ist beides zugleich, fallen lassen, und davon Abschied nehmen, müssen wir jedenfalls alle Wörter und Begriffe dieser Art, nur wie poëtische Bilder, an welchen die Einbildungskraft gerne festhält, ansehen, so wird der Ausdruck, den man als tiefe Wahrheit den imaginären Zahlen giebt, nemlich der Ausdruck, sie seien lateral, auch höchstens als Anhaltspunkt für die Einbildungskraft günstig gewählt sein, ohne dass ihm deshalb eine tiefere Wahrheit beizumessen ist. Es ist schwer die Zahlen, und

mit den positiven auch die negativen etc. alle, in demselben Punkt des Raums, oder der Zeit, cumulirt, d. h. sie alle und ihre ganze Gesetzlichkeit als blosser Abstraction zu denken, ebenso abstract wie ein einziger Punkt im Raum oder in der Zeit ist ganz ohne Dimension und ohne Dauer, ja noch abstracter, als einen Punkt. Es bedarf indess keines weiteren Beweises, dass dies wirklich erfordert wird. Es ist dem Geist ein erfreuliches Bild in einer Kegelpyramide, von einem und demselben Punkte aus durch viererlei gradflächige Schnitte alle Curven des zweiten Grades, nemlich die Hyperbel oder Ellipse (als Regel) und einmal die Parabel und den Kreis hervorbringen zu können. In solchem Kegel liegen jedoch nicht bloss jene Gesetzlichkeiten, sondern auch der Pythagoreische Lehrsatz, etc. und die ganze Geometrie, denn durch andre nicht grade sondern veränderte Schnitte, können aus dem Kegel, aus jedem Körper, andre Curven oder Figuren, und zwar alle ohne Ausnahme, herausgeschnitten werden, denn es liegen in jedem einzelnen Körper alle Gesetzlichkeiten des Raums, und der Lehrer kann dem Schüler sagen, die ganze räumliche Mathematik, die du zu lernen beginnst, liegt in dem einen kleinen Würfel, mit dem du spielst, und alle die mathematischen Fragen, die die Geometer aller Jahrhunderte beschäftigt haben, lassen sich in die eine Frage concentriren: welche Gesetzlichkeiten enthält dieser Würfel? Aehnlich müsste man dann dem die Arithmetik und die Algebra Lernenden vorhersagen, dass die Gesetzlichkeiten, die er betrachten wird, nicht in einem Würfel, oder in irgend einer Raumgrösse, die eine Dimension hat, liegt, sondern dass hier jeder Gedanke an Dimensionen auch noch wegfällt, dass die ganze Arithmetik in demselben Moment und in demselben Raumpunkt sich bewegt, aus der Eins entsteht, so dass die concentrirte Frage, in welcher alle arithmetischen und algebraischen Fragen lie-

gen, hier die Frage ist: welche Gesetzlichkeiten enthält die Eins? Die Geometrie also hat die Gesetzlichkeit eines Würfels, oder eines Raumes und damit überhaupt des Raums zur Frage, die Arithmetik hat die Eins, und damit die Gesetzlichkeit der Eins, d. h. die Gesetzlichkeit selbst, also nicht die des Raumes, und nicht die der Zeit, sondern die Gesetzlichkeit rein und blos als nur die Gesetzlichkeit zu ihrem Gegenstande. Crediderunt, sagt einmal Leibniz in einer Abhandlung, die er 19 Jahr alt als Student geschrieben), Scholastici, numerum ex sola divisione continui oriri. Diese von den Scholastikern behandelte furchtbar schwere Frage, ob es vor der Schöpfung eines Continui, als vor einem Continuum schon mehrere Einse giebt, ob also der Zahlgedanke wirklich das Erste sei, drängt sich hier herauf, doch thun wir erschaffnen Wesen wohl am besten zu gestehen, dass wir nichts darüber denken können. In der Eins liegen alle ihre Gesetzlichkeiten, liegt die ganze allgemeine Mathematik. Wie in einem Kerne der Baum, nur dass der Baum noch ausser seinem Kerne der Luft, der Feuchtigkeit, der Wärme, der Electricität, vieler ausser ihm liegender Beihülfe bedarf, um den Baum zu erschaffen; während die Eins zu allen Entwicklungen der Mathematik nichts als die Eins verwendet. Aber es verwendet die Algebra ausser der Eins noch zwei andre Gedanken, die Null und den Gedanken der Allheit. Ist der Gegensatz der Null, also des Nichts, und des Alls, zwischen den sich die Eins, das Individuum, als ein Vermittler stellt, ist dieser Gegensatz berechtigt, ist er der Erzeuger der Mathematik? Das sind Endfragen, die schwierigsten. Die Mathematik weiss darauf keine Antwort, sie nimmt den Gedanken der Einheit, als wäre er ein Evangelium, als den festen Anfang ihrer Erkenntniss, und bleibt consequent bei diesen Gedanken, ihn an die Null und an die Allheit hinanführend. Möchte

selbst dieser erste Gedanke der Algebra und der Mathematik, die Eins, ein falscher Gedanke sein, indem es vielleicht kein Individuum, keine Eins, giebt, sondern alles nur Werden, oder ein Schweben zwischen Nichts und dem Ganzen, oder der Allheit wäre, möchte anstatt eine Eins, ein Individuum zu sein, Dies oder Jenes, das wir als Individuum anerkennen, z. B. ein Baum, ein Thier, ein Mensch, in Wahrheit nicht eine Eins, ein wirkliches Individuum, Etwas das für sich besteht, sein, sondern nur ein Theil des Ganzen, um zu dessen Organisation beizutragen: möchte also es kein Individuum geben, denn wenn nicht einmal der Mensch ein Individuum sein möchte, so sind noch viel weniger die andren Gegenstände, ein Stein, eine Pflanze, ein Planet, die Sonne u. s. w. als Individuum, als Einse zu denken — die Mathematik bleibt von diesen Zweifeln frei, sie supponirt die Eins in dem grösseren Ganzen, sie beginnt mit dem Gedanken Eins, vielleicht grade deshalb, weil der Mensch auch etwas in seinem Innern fühlt, das ihm sagt, dass er eine Eins ist, dass ihm Willensfreiheit d. h. wahre Individualität, die nicht ohne Unsterblichkeit denkbar, zukommt, wie schwer diese auch mit dem Gedanken einer Allheit die Allwissend und Allmächtig ist vereinbar sein mag. Sie beginnt mit der Eins, und lässt diese sich an ihrem andren, an der Null reizen, reiben, sich damit messen, damit und mit dem All streiten oder kämpfen, um sie zu besiegen, ihre Ordnung in sie hineinzubringen. Möchte dieser Grundgedanke, der Gedanke der Eins, falsch sein, seine consequente Entwicklung muss jedenfalls lehrreich bleiben, und zu einer wirklichen Synthesis, die dann die Wahrheit sein kann, führen, denn die consequente Verfolgung eines unwahren Grundgedankens führt über diesen hinaus. Dies übersah der grosse Königsberger Philosoph, der die berühmte Frage, sind synthetische und doch apriorische Urtheile mög-

lich? verneinte. Er übersah, dass während zwar dem Anschein nach eine sich noch so sehr entwickelnde Wahrheit immer nur diese Wahrheit bleibt, also nie eine andre, nie ein neues Urtheil wird, sondern immer nur jene identische Wahrheit bleibt, dagegen doch ein unrichtiger Anfang, und unsre Anfänge sind wohl immer unrichtig, der sich entwickelt, über sich hinausweist, und eine *synthesis a priori*, einen Fortschritt, zu einem Wahreren möglich macht. Die consequente Durchführung eines vielleicht unwahren, weil einseitigen, Anfangs oder Grundgedankens, wie der Gedanke der Eins vielleicht unrichtig sein möchte, hat jedenfalls belehrende Kraft. Rousseau's im Emil durchgeführter Gedanke über die Erziehung ist unrichtig, aber aus Rousseaus consequenter Durchführung desselben ist mehr zu lernen, als aus den wahren inconsequenteren systemlosen *Aperçus*, die man vor ihm und nach ihm an die Stelle seiner Ideen setzt. So ist es, nicht blos in der Mathematik sondern überall in unsrem Wissen immer grade nur die Consequenz die Licht verbreitet, und der Mathematik wird man den Vorwurf der Inconsequenz mindestens nicht machen, die man auch in der Philosophie vermeiden, und nur in der katholischen Theologie herbeiziehen will. Wir lassen in der Mathematik diese hoffentlich überflüssigen Scrupel, und bleiben hier also ruhig bei dem alten Vorurtheil, dass die Eins, der Grundgedanke in der Mathematik, die beste, und eine wohlbegründete Berechtigung hat, dass nach Beseitigung aller Qualitäten, noch dies, dass ein Ding eine Eins ist, übrig bleibt, und in höchster Abstraction dies, das Einssein, allein erfasst werden darf. Wir sehen daher mit freudiger Laune und mit Bewundrung dem Gang der Algebra zu. Sie nimmt ohne sich um die Geschichte der Eins zu bekümmern, die Eins als entstanden, und führt consequent diesen Gedanken weiter seine Gesetzlichkeit betrachtend, indem sie

durch die blosse Methode der Wiederholung die Eins als Vielheit setzt, dadurch die Zahl, die 2 und die 3 erzeugt, und dann ferner alle diejenigen andren Gesetzlichkeiten in der Zahl, also in sich, entdeckt, die zuletzt zur Differenzialrechnung führen.

Sehr bedeutend ist in der Mathematik bekanntlich das Binomialgesetz. Mit Recht erstaunen wir gleichsam über die ausserordentliche Tragweite dieses von Newton erfassten Theorems. Es beleuchtet nur die Gesetzlichkeit, die entsteht, wenn ein Binom zur Potenz erhoben wird. Die multiplicatorische, die potenzliche Gesetzlichkeit, war in sich bekannt, da brachte Newtons Gedanke zu ihr die Addition hinzu, legte den additorischen, den subtractivischen, Gedanken in sie hinein, indem er

$$(a + b)^2$$

anstatt des einfachen

$$a^2$$

untersuchte. Indem die Potenz so ihr Wirken auf den in sie hineingelegten subtractivischen Gedanken betrachtete, sah sie gleichsam in sich selbst hinein. Damit begann die Differenzialrechnung. Das multiplicatorische Gesetz, die Potenz, nimmt das additorische Gesetz in sich auf, misst dieses an sich, und sich an ihm. Das Binomialtheorem liegt den bisher gebräuchlichen indirecten oder apagogischen Beweisen der Differenzialrechnung daher zum Grunde. Da wir in vorstehender Abhandlung den Fall a^x auch nur apagogisch jedoch wahrer beweisen konnten, so wollen wir diese Beweisart in ihrem Verhalten zu diesem Fall in der Differenzialrechnung hier genauer betrachten. Diese Art der Differenzialbeweisung setzt

$$a^x + k$$

als den zweiten Fall, zieht davon den ersten Fall a^x ab

$$a^{x+k} - a^x$$

und fragt, wie verhält sich diese Differenz in der ganzen Functionsgesetzlichkeit zu k d. h. zu der Differenz in einem Theil des Ganzen, dem Exponenten, wir vergleichen, d. h. theilen, also die Differenz des Ganzen mit der Differenz dieses ihres Theiles, also wir schreiben

$$\frac{a^{x+k} - a^x}{k}$$

Es muss aber das k irgendwie aus dem Exponenten von a herausgenommen, und dafür in irgend welche Coefficienten von a hineingelegt werden, dann sind die Rechnungsarten mit dem k so, dass sie sich miteinander messen, theilen, vergleichen können, da dann im Zähler Multiplicationen mit k vorkommen, in denen die Vorschrift mit k zu theilen zur Ausführung kommen kann. Betrachtet man nun die Binomial-Entwicklung von Newton, etwa als

$$(r + a)^m = r^m + m \cdot r^{m-1} a^1 + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} r^{m-2} a^2 + \frac{m \cdot (m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{m-3} a^3 + \text{etc.}$$

so sieht man, dass der Exponent, m , ganz in die Coefficienten geworfen ist sofern wir auf a allein sehen, während der Exponent m bei dem r sich immer noch als m zeigt (da die Potenzen nur des r , mit m anfangen und um Eins abnehmen, während die Potenzen des a mit Eins anfangen und um Eins zunehmen, also hier erst das unendlich weit hinaus zu denkende letzte Glied der Entwicklung den Exponenten m empfangt, welches m dann aber, wenn es dazu käme, auch bekannt sein würde, da

es aus successiven Addirungen von Eins zu Eins, Eins zu Zwei, Eins zu Drei u. s. w. wird [werden muss gleichsam wider Willen], also bedenken wir, dass in Newtons Binomial-Entwicklung, die sowohl für $(r + a)^m$ wie für $(r - a)^m$ bis auf den Zeichen-Wechsel dieselbe ist, in Betreff der einen der beiden Grössen r und a der Exponent m nur in Coeffizienten vorkommt, während er in Betreff der andren Grösse auch im Exponenten sich erhält, und bedenken wir nun, dass wir nur diese andre Grösse $r =$ Eins machen können, um auch in ihr alle Exponenten unschädlich zu machen, nemlich sie hier ganz zu vernichten, da die Grösse Eins auf jeder Potenz Eins ist und bleibt, so haben wir hierin das Mittel einen Exponenten ganz in Coeffizienten hineinzulegen, nemlich das Mittel die Wurzel zweitheilig so zu denken, dass ihr erster Theil $=$ Eins sei.

Wir thun dies also in unsrem Falle, also in dem Falle:

$$\frac{a^x + k - a^x}{k}$$

nachdem wir zuerst dies (da $a^x + k = a^x \cdot a^k$ ist) als

$$\frac{a^x \cdot a^k - a^x}{k}$$

gedacht haben, oder als

$$\frac{a^x}{k} (a^k - 1)$$

In dem a^k welches wir allein bedenken wirft man also aus dem angegebenen Grunde das k aus dem Exponenten hinaus, so dass es nur noch in Coeffizienten zu a erscheinen wird, indem man statt a eine zweitheilige Grösse, deren erster Theil Eins ist setzt, und zwar etwa $1 - (1 - a)$

wo $(1 - a)$ als ein zusammenhängendes Ganzes in der Rechnung überall erscheint. Also an die Stelle von a setzen wir das ihm gleiche $1 - (1 - a)$, d. h. wir denken uns a als eine arithmetische Function von Eins (und von a).

Es ist also $a^k = [1 - (1 - a)]^k$
also nach Newtons Binominal-Entwicklung jenes

$$a^k = 1 - k[1 - a] + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} [1 - a]^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1 - a]^3 + \dots$$

Nun ist eine unendliche Reihe an die Stelle eines endlichen Ausdrucks getreten, weil $\frac{a^k}{k}$ irrationell d. h. nicht durch einen endlichen Ausdruck zu geben ist, falls k aus dem Exponenten hinweggenommen werden soll.

Also in einem unendlichen Ausdruck haben wir den Exponenten k in die Coeffizienten hineingelegt, der Kaigkeit (man gestatte das Wort) die einfache Multiplicationsform gegeben, und können dies nun mit k vergleichen, d. h. theilen, also die Differenz in der Potenz jetzt und jetzt erst mit der Differenz ihres Exponenten vergleichen.

Wir nehmen nemlich jetzt wieder den ganzen Ausdruck

$$\frac{a^x + k - a^x}{k}$$

in seiner Form

$$\frac{a^x \cdot a^k - a^x}{k}$$

oder in seiner Form

$$a^x \cdot \left(\frac{a^k - 1}{k} \right)$$

setzen an die Stelle von a^k seine Entwicklung, und finden gleich, dass wir die Coeffizienten, die allein das k enthalten, nun sämmtlich mit k wirklich theilen können, und das, was uns entsteht, ist

$$a^x \left[\frac{1}{k} - [1-a] + \frac{(k-1)}{1 \cdot 2} [1-a]^2 - \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1-a]^3 + \dots - \frac{1}{k} \right]$$

also ganz ohne k im Divisor

$$a^x \cdot \left[-[1-a] + \frac{(k-1)}{1 \cdot 2} [1-a]^2 - \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1-a]^3 + \dots \right]$$

Dies ist die Antwort der Algebra, die einen Fehler macht, indem sie zwei Stellen oder Fälle benutzt, nemlich die Stelle $a^x + k$ und a^x .

Verdoppelt die Algebra den Fehler und setzt $2k$ an die Stelle des einen k , vergleicht also $a^x + 2k$ und a^x mit $2k$, setzt also

$$\frac{a^x + 2k \text{ abzüglich } a^x}{2k}$$

so wird die Reihe

$$a^x \cdot \left[-[1-a] + \frac{(2k-1)}{1 \cdot 2} [1-a]^2 - \frac{(2k-1)(2k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1-a]^3 + \dots \right]$$

Da schliesst die Algebra, wenn zwei Fehler in den Coeffizienten der Antwort überall $2k$, ein Fehler überall ein k giebt, so ist die Antwort fehlerlos, wenn weder ein k noch zwei k sondern gar kein k darin ist, wodurch als die feh-

fehlerlose Antwort, indem Null an die Stelle von k zu setzen, entsteht

$$a^x \left[-[1-a] + \frac{-1}{1.2} [1-a]^2 - \frac{(-1)(-2)}{1.2.3} [1-a]^3 + \dots \right]$$

oder

$$a^x \left[-[1-a] - \frac{1}{1.2} [1-a]^2 - \frac{2}{1.2.3} [1-a]^3 - \frac{6}{1.2.3.4} [1-a]^4 - \dots \right]$$

oder

$$a^x \left[-(1-a) - \frac{1}{2} (1-a)^2 - \frac{1}{3} (1-a)^3 - \frac{1}{4} (1-a)^4 - \frac{1}{5} (1-a)^5 - \dots \right]$$

Das ist also die fehlerlose Antwort, die sagt das Verhältniss des Zuwachses zur Potenz a^x im Vergleich zu dem Zuwachs zu ihrem Exponenten ist a^x mal etwas was als Function von Eins und von a eine unendliche Reihe ist:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \cdot \left[-(1-a) - \frac{1}{2} (1-a)^2 - \dots \right]$$

Das Differenzial von a^x ist dem Differenzial von x also incommensurabel, was ganz begreiflich ist. Die Incommensurabilität dessellen, oder einfacher die Incommensurabilität

von $\frac{a^k}{k}$ liegt nämlich darin, dass durch das k im Exponenten

die Grundzahl a gar nichts vom k annimmt, sondern nur sich mit sich so viel mal ändert, als k andeutet. Es ist k hier gleichsam nur der oberste Befehlende, der von ferne steht und zusieht, oder nur anzeigt, was a alleine

thut. Es ist im Zähler des Bruches, $\frac{a^k}{k}$, trotz des entgegenstehenden Anscheins, gar kein k . Der Zähler dieses Bruches ist gar nicht käig (sit venia verbo), sondern nur

aig, (nur Function von a nicht von k , welches nur notirt, welche Function von a die a -Function ist). Um k wirklich hineinzubringen, muss es in Coefficienten (Mitarbeiter, Mitkämpfer) hinein gelegt werden.

Da hier eine unendliche Reihe die Antwort giebt, so wird es nöthig, dass die Reihe convergire, damit man, da die Antwort nicht genau ist, ihren grösseren Theil zuerst habe. Dies ist hier der Fall wenn $a < 1$ ist, deshalb setzt man für $a > 1$ bekanntlich, wenn man überhaupt diesen Beweis so einfach halten will, ein andres Binom an die Stelle von a , welches für $a > 1$ (und nicht für $a < 1$) convergirt, und dessen erstes Glied wieder Eins ist, worüber diese kurze Bemerkung hier genügt.

Wir sehen gerne, wenn über diese Erklärung der Entwicklung von $a^{x+k} - a^x$ und über unsre Beschränkung des eigentlichen Begriffs der Function, auf den Fall des multiplicatorischen, „Mit“wirkens das Urtheil Unpartheiischer uns bald bekannt würde.

Man kann, um noch diese Bemerkung hinzuzufügen, die Nothwendigkeit der Incommensurabilität dieses Differenzials am besten fühlen, wenn man bedenkt, dass falls es etwas gäbe, was dem Differenzial von a^x gleich wäre, der Ausdruck a^x von der Null anfinge, also an die Null käme, da a^x minus jenes Differenzial gleich Null wäre. Es ist aber a^x niemals = Null, sondern a^0 ist = Eins; d. h. die multiplicatorische Gesetzlichkeit berührt nicht die Null und nähert sich ihr im Gebiet des Positiven nicht, da sie nicht kleiner als Eins wird. Auch x^a (oder x^m) berührt die Null nicht. Es giebt kein multiplicatorisches (geometrisches, divisorisches) „Verhältniss“ einer Zahl zur Null, welche Wahrheit Ohm und Schloemilch in vielen Beziehungen entwickelt haben, woraus der Streit über die Möglichkeit oder

Unmöglichkeit der Logarithmen negativer Zahlen sich erklärt. Aber x^m nähert sich doch der Null, wird beliebig klein, und ist deshalb subtractivisch messbar, d. h. führt zu keiner Incommensurabilität, während a^x mit dem Nullwerden des Exponenten sich der Null nicht nähert, sondern erst, wenn der Exponent negativ geworden, wird a^x kleiner als Eins und nähert sich der Null um so mehr, als sich der Exponent nun davon seinerseits entfernt. Diese Form hat deshalb kein Verhältniss zum Nichts.

Zur Unendlichkeit haben alle Zahlen ohnehin kein Verhältniss. Nicht einmal additorisch erreicht die Eins das Unendliche, während additorisch oder subtractivisch, nur nicht divisorisch oder multiplicatorisch, die Eins in der Regel zum andern Ende des Gedankens der Vielheit, zum Anfang, zur Null, allerdings in Beziehung tritt. Dieses additorische, oder subtractivische Verhältniss zur Null genauer zu untersuchen ist eben die Aufgabe der Differenzialrechnung.

Einige Definitionen behaupten, dass diese Rechnung die Wissenschaft des Continuum, des Fliessens, sei. Aber das Continuum ist nur in den physikalischen Wissenschaften, zu denen auch die Raum-Wissenschaft, die Geometrie, gehört, der Gegenstand der Betrachtung. Die Zahl ist, selbst wo sie in höchster Abstraction als Differenzialrechnung betrachtet wird, niemals Continuum, sondern immer Discretion, sie ist die Discretion welche es unternimmt das Continuum zu messen.

Nur in jenen Wissenschaften, die, wie zuerst die Geometrie, nicht reine Mathematik, sondern eine Anwendung der reinen Mathematik, der Algebra, sind, ist Continuität. Der Mensch zerschneidet z. B. wohl auch das Ganze der Raumgesetzlichkeit in einzelne Sätze, aber hier nicht um Einzelnes, sondern um das Ganze zu erkennen, um in der Erkenntniss durch Einzelnes successif fortzuschreiten, aber

in der Arithmetik, in der Algebra, ist die Sache selbst einzeln, discret, die Zahl, die Eins, aus der ihre Gesetzlichkeiten entstehen, sie kann immer nur Discretion erzeugen, die Continuirlichkeit, das Fliessende, das Werdende, kommt in ihr nie zur Erkenntniss, sondern immer nur der Stoss, das Einzelne, das sich mit dem Nichts und an dem All zerreibt. Nicht das Werden der Grösse (man wüsste nicht voraus, da die Antwort aus dem Nichts des Differenzials eben Unsinn ist), sondern nur das Werden einer Grösse (aus einer andren Grösse die immer schon geworden ist) untersucht die Algebra. Aber indem sie die Subtractivitäten, die das in ihr sind, was die Continuität in der Realität ist, durch die Differenzialrechnung untersucht, wird sie befähigt in die Gebiete, in denen keinerlei Discretion ist, in das Gebiet der Geometrie, der Physik u. s. w. kühner hineinzugehen, so sehr, dass sie, wie mit einem Zauberschlag, Gesetzlichkeiten dort, im Gebiet des Continuirlichen, entdeckt und nachrechnet, die dort zu finden sehr schwer sein würde. (Was anders als eine „Anwendung“ der Discretion auf die Continuität des Raumes ist es, wenn von Dreiecken, drei Raumesdimensionen, drei Winkeln u. s. w. die Rede ist, wo das Discrete, die Zahl Drei, sich in die Continuirlichkeit der Geometrie hineinsetzt?) Eine wirkliche Vermischung der discreten Wissenschaft, mit den Continuitäts-Wissenschaften scheint jedoch in den cyclometrischen Gesetzlichkeiten, in ihrer Anwendung auf die imaginären Grössen, versucht zu werden, wenn die letzteren

sich in die Form

$$\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)$$

umsetzen, d. h. wenn eine Zahlenfunction in eine davon verschieden scheinende geometrische Gesetzlichkeit mit dem

Begriff des Imaginären umgesetzt wird, woraus der Vortheil sich ergibt, dass Theile einer Gesetzlichkeit, die rein algebraisch dem Auge entswinden, oder verdeckt bleiben, an's Tageslicht treten, wenn sie ihr geometrisches Kleid umhängen (wie umgekehrt mehrfach bekanntermassen der Fall ist). Ob damit nun wirklich endlich das Werden, das Continuum, das All, in die Discretion, in die Eins, sich eintaucht, und das Erkannte zugleich als Eins und als Theil des Ganzen, also als Ich mit freiem Willen, und doch auch als Theil des Ganzen, gefasst werden kann, das müssen wir hoffen. Auch wenn wir, die wir nicht das All sind, nicht diesen uns scheinbaren Widerspruch der Einheit und ihres discreten Nebeneinanderstehens mit der Allheit und ihrem continuirlichen Ineinanderfliessen, zu fassen im Stande sein können; (da wir das All nicht von seinem Centrum aus, sondern von unserm beschränkten Ich aus, dieses als Einheit postulirend, wie die Arithmetik die Eins postulirt, also von einem Punkte der Peripherie aus betrachten). Darin liegt unsre Hoffnung, dass wir einmal in das Centrum, in die Allheit der Welt, nach diesem Leben in der Unsterblichkeit, hineinfühlen, in sie hineinreichen können, ohne dass unser Ich, unsre Eins, deshalb ausgewischt wird. Wir bitten um Entschuldigung wegen der harten Weise, mit welcher wir solche! Frage hier behandeln, die aber wie alle Fragen im Anfang wohl nicht sanft sein kann und fügen ebenso hart noch hinzu, selbst wenn der Materialismus, oder gar auch die ernste Wissenschaft, die das gleichfalls zu behaupten scheint, darin, wie wir nicht glauben, Recht hätte, dass die Seele, (die Seele, welche nach unsrer Meinung allein diesen Namen verdient, die Seele des Menschen), nur so von der Thierseele, und diese von den Pflanzen, verschieden wäre, dass die letzteren nur eine schwächere, übrigens aber dieselbe, Wesenheit und Eigenschaft haben sollten, wie das Ich des

Menschen, so wäre für uns die Unsterblichkeit doch noch gerettet, weil es selbst dann möglich sein könnte, dass das Wenigere der Thierseele in der geschaffnen Materie schwimmt, und sich nicht zur selbstständigen Eins zu formen, oder sich als solche nicht zu erhalten im Stande wäre, während die nur stärkere Menschen-Seele, sich als Eins zu setzen oder zu erhalten im Stande sein könnte. Wie die Algebra von der Berechtigung der Eins als (richtigem oder unrichtigem?) Axiom ausgeht, so auch die Logik. Wie jene Curven rectificirt, die Curve als grade Linie, gleichsam das Werden als Sein fassen will, so auch will die Sprache, die Logik, das Werden in's Sein übersetzen, fragend was etwas ist (copula), um das Fliessen als Stehend, das All als Einzelnes anzuschauen, voraussetzend, weil das Ich selbst eine Einheit, dass das All aus Einsen bestehe, dass das Gesamtwissen sich fassen lasse, als das Wissen von lauter Einzelnen, von Subjecten. Und wenn und weil das menschliche Ich sich als Subject, als ein freier Wille, als eine Einheit als unsterblich fühlt, so ist deshalb diese Betrachtungsweise gerechtfertigt. Auch die Differenzialrechnung ist und bleibt Discretion, das ist es, was wir vollständig dargethan zu haben glauben, und die Geometrie, wie alle andren physikalischen Wissensgebiete, werden durch die Discretion, d. h. durch die Algebra beherrscht, die allein reine Mathematik, d. h. Wissenschaft der reinen Gesetzlichkeit ist.

Wir können nicht umhin, damit wir von den Umwegen, um nicht mehr zu sagen, welche die frühere Theorie gehen musste, eine Idee geben, einen Paragraphen des als Algebrist berühmten, und mit Recht berühmten Cauchy über das angeblich Unendlichkleine zu citiren. Er sagt im Cours d'analyse 1821 S. 26: §. 1. Des quantités infiniment petites et infiniment grandes. On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro — — — Soit α une quantité infiniment petite c'est à dire une variable (also dx wird definirt als variabel), dont la valeur décroisse indéfiniment. Lorsque dans un même calcul on fait entrer les diverses puissances entières de α , savoir

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \text{ etc. } . . .$$

ces diverses puissances sont respectivement désignées sous le nom d'infiniment petits du premier du second du troisième ordre (man soll also denken: verschiedene Kleinheiten eines Dinges das schon unendlich klein ist). En général

on appelle infiniment petit du premier ordre toute quantité variable dont le rapport avec α converge tandis que la valeur de α diminue, vers une limite finie différente de zéro; infiniment petit du second ordre toute quantité variable avec α , et dont le rapport avec α^2 converge vers une limite finie différente de zéro etc. Cela posé si l'on désigne par k une quantité finie différente de zéro et par ε un nombre variable qui décroisse indéfiniment avec la valeur numérique de α , la forme générale des quantités infiniment petites du premier ordre sera

$$k\alpha \text{ ou du moins } k\alpha (1 \pm \varepsilon)$$

la forme générale des quantités infiniment petites du second ordre

$$k\alpha^2 \text{ ou du moins } k\alpha^2 (1 \pm \varepsilon)$$

enfin la forme générale des infiniment petits de l'ordre n (n représentant un nombre entier) sera

$$k\alpha^n \text{ ou du moins } k\alpha^n (1 \pm \varepsilon)$$

Dann folgen die speciellen Theoreme.

Wir sind denn doch der Meinung, dass es wie eine Erlösung ist, wenn man von dem allen sich befreit sieht.

Ich denke an die Zeit als ich noch gläubig an dem Grenzbeweis hing, aber doch nicht umhin konnte zu lächeln, wenn ein Professor im Collegium eine Menge Zahlen und Buchstaben in Reihen an die langen Tafeln gezeichnet hatte, und dann plötzlich sich umwendend sagte: Maintenant Messieurs passons à la limite. Wie im Nu wurden dann durch einen nassen Schwamm die langen Rechnungen wieder weggetrieben. In der Freude Udenkbares nun endlich doch denken zu können, soll nicht selten ein Professor zufrieden lächelnd den Schülern dabei gesagt haben: Vous ne croyez pas en cela! Mais la foi viendra; avancez toujours. Man denke nur, dass man so in der Mathematik!! zu reden für gut gefunden.

Was aus der Grenzmethode werden kann, wenn ein katholischer Geistlicher und Philosoph, der als ancien élève de l'école polytechnique die Mathematik zu verstehen

sich ernsthaft einbildet, ein theologisches System darauf gründet, das kann man aus den, viel Aufsehen machenden, neusten Werken des Herrn Gratry ansehen.

Wir hoffen in dem hier folgenden Zusatze die ganze Stärke unsrer Ansicht, oder, wie der Fall sein mag, ihre ganze Schwäche, damit Zustimmung oder Tadel leicht sei, offen darzulegen, indem wir ihren Conflict mit etablirten Ansichten nach einigen Seiten hin darstellen. Während einerseits gelehrt wird, dass die Potenz ganzer Exponenten so viele Differenziale hat, als die Zahl des Exponenten anzeigt, also dass x^2 zwei Differenziale hat, ein erstes und ein zweites, aber kein drittes, wird von xy gesagt, es habe mehr als zwei, und zwar unendlich viele Differenziale. Zuerst ist das Differenzial dieser Function, wie wir es in unsrer Untersuchung gefunden, $xdy + ydx$, dann sagt man, das zweite Differenzial ist $xd^2y + dydx + yd^2x + dxdy$ (oder $xd^2y + 2dxdy + yd^2x$) und dann das dritte $xd^3y + d^2ydx + dyd^2x + dxd^2y + yd^3x + d^2xdy + dxd^2y + dyd^2x$ (oder $xd^3y + 3dxd^2y + 3dyd^2x + yd^3x$), und das vierte wieder complicirter u. s. w. Schon bei Leibniz finden wir zuerst diese Betrachtungsweise, durch welche nicht blos in dem ersten Ausdruck xy beide x und y als variabel genommen, sondern auch in deren

erstem und fernerem Differenzial das dy und dx immer wieder als variabel gesetzt und immer wieder mit differenziert wird, weshalb eines solchen Differenzirens gar kein Ende ist. Memorabilis est consensus inter numeros potestatum a binomio et differentiarum rectanguli, schreibt Leibniz an Bernoulli. Exempli gratia

$(x+y)^1 = 1x + 1y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$	$d^1(xy) = 1ydx + 1xdy = 1d^1xd^0y + 1d^0x + d^1y$
$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$	$d^2(xy) = 1yd^2x + 2dydx + 1xd^2y$
$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	$d^3(xy) = 1yd^3x + 3dyd^2x + 3d^2ydx + 1xd^3y$
$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$	$d^4(xy) = 1yd^4x + 4dyd^3x + 6d^2yd^2x + 4d^3ydx + 1xd^4y$
etc. etc.	etc. etc.

und Bernoulli antwortet (Cf. comm. epist. I. S. 46—48): Nihil elegantius est, quam consensus quem observasti; haud dubie aliquid arcani subest. Leibniz zufrieden mit dieser Zustimmung des Bernoulli, generalisirte, wie es ihm gewöhnlich ist, diesen Gedanken, jedoch nur in der Ueberschrift, die er ihm gab, denn wir lesen 15 Jahre später in der Zeitschrift *Miscellanea Berolinensia* unter der grossartigen Ueberschrift G. G. Leibniz (oder wie Leibniz sich immer nannte: G. G. L.) *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis*, ohne irgend eine Erklärung, nur jene kurze Notiz, wie denn Leibniz überhaupt im kurzdogmatischen, man möchte sagen, Orakelton, zu schreiben liebte. Es kommt nur darauf an, wie man das zweite Differenzial von xy fasst, indem die übrigen dann von selbst folgen, die Worte des Leibniz darüber sind: $\text{differentiae secundae sunt } dd(xy) = d(ydx + xdy) = d(ydx) + d(xdy)$. Jam $d(ydx)$ est $= yddx + dx dy$.

Nam pro dx scribamus z et erit $ddx = dz$ et fiet $d(ydx) = d(yz) = ydz + zdy = yddx + dx dy$ u. s. w. Man sieht, dass, ohne irgend eine Erklärung, Leibniz nur de facto in dem ersten Differenzial der Function xy , also in $xdy + ydx$, nicht blos das x und das y , sondern auch dy und dx als variable (ein z statt derselben denkend) setzt.

Wollen wir uns klar machen, wie man auf diese eigenthümliche Betrachtungsweise fiel? Wahrscheinlich auf die folgende Weise. Man wollte in dem Fall xy nicht inconsequent nur ein Differenzial (dx z. B.) constant denken. hatte aber nicht den Muth dx und dy beide als constant zu fassen. So wurden sie beide variabel. In der Lehre von den Potenzen aber blieb man bei dem entgegengesetzten Gedanken, ohne Arg erzählend, dass x^2 nur ein erstes und ein zweites Differenzial habe, nicht bemerkend, dass nur der eine oder der andre Gesichtspunkt zum Ausgang gewählt werden darf. Ist dx variabel und seine Variabilität auch noch ganz unbestimmt (freilich ein komischer Gedanke, der natürlich zu nichts führen kann, den man aber, um unendlich viele Differenziale in xy zu bekommen, für einen ernsthaften Gedanken hält), so hat x^2 ebenso viel Recht darauf unendlich viel Differenziale zu besitzen, als xy , ist aber dx constant, wie man es richtig in dem Falle x^2 annimmt, so muss auch dy constant sein, und es hat dann xy nicht mehr Differenziale als x^2 , nemlich beide haben nur ein erstes und ein zweites, indem $d(xy) = xdy + ydx$ und $d^2(xy) = 2dx dy$ ebenso wie zuerst $d(x^2) = 2x dx$ und dann $d^2(x^2) = 2dx^2$ ist. Nach Leibniz aber hat xy unendlich viele Differenziale.

Euler hat funfzig Jahre später sich dieses zuerst unschuldigen Gedankens bemächtigt, und geht mit seinem systematisirenden Talent, das ihn so furchtbar viel schreiben liess, auch über diese Frage in jedes denkbare Detail da-

bei überall an die Grenze der Wahrheit hinanstreifend, ohne sie zu erfassen. Er sagt in den Institutionibus calculi differentialis im 7ten Capitel §. 124 ff., und in dem ganzen achten Capitel, §. 242 280, nachdem er die ersten und zweiten Differenzen (differentiae primae et secundae) und die ersten Differenziale (differentialia prima) behandelt hat, §. 124 nun: Progrediamur ad differentialium secundi ordinis naturam explicandam, quae oritur ex differentiis secundis. Cum igitur, si ponamus quantitatem variabilem x aequalibus incrementis crescere ita ut si valor secundus x^I fuerit $= x + dx$, sequentes futuri sint $x^{II} = x + 2dx$; $x^{III} = x + 3dx$ etc., ob differentias primas constantes $= dx$ differentiae secundae evanescent: erit ergo quoque differentiale secundum ipsius x , nempe $ddx = 0$. §. 126. Cum differentia secunda nihil aliud sit nisi differentia differentiae primae; differentiale quoque secundum, seu differentio differentiale nil aliud erit praeter differentiale differentialis primi. Quia deinde (Michelsen übersetzt „Da ferner“) quantitas constans nulla neque augmenta, neque decrementa accipit, nullasque admittit differentias, quippe quae solis quantitatibus variabilibus sunt propriae, dicemus eodem sensu quantitatium constantium differentialia omnia, cujusque ordinis, esse $= 0$. Cum igitur (Michelsen „Da also“) differentiale ipsius dx hoc est ddx sit $= 0$; differentiale dx tanquam (sic) quantitas constans considerari (sic!) potest, et quoties differentiale cujuspiam quantitatis dicitur constans, toties ea quantitates intelligenda est continuo aequalia incrementa accipere. Sumimus hic autem x pro ea quantitate cujus differentiale sit constans hicque (sic) singularum ejus functionum variabilitatem, cui earum differentialia sunt obnoxia aestimabimus. Das ist die wunderbar geschriebene Einleitung, mit welcher Euler dazu hinkommt, ganz richtig, aber wie er glaubt nur bittweise, d. h. nur unberechtigt, immer das Differen-

zial, dx , constant machen zu können, und mit diesem richtigen Gedanken wird dann die Lehre von den Differenzialen in ihrer Beziehung auf eine Variable durchgehandelt, aber §. 130 nochmals in vorsichtiger Angst bemerkt: Quamquam ratio aequalitatis simplicissima atque aptissima, quae continuo ipsius x incrementis tribuitur (Michelsen: „Ob nun gleich das Verhältniss der Gleichheit das einfachste und für die Incremente von x das schicklichste ist”), tamen frequenter evenire solet (sic), ut non ejus quantitatis variabilis x , cujus y est functio, incrementa aequalia assumantur, sed alius cujuspiam quantitatis, cujus ipsa x sit functio quaedam. Quin etiam saepe ejusmodi alius quantitatis differentialia prima statuentur aequalia, cujus nequidem relatio ad x constet. Priori casu pendebunt differentialia secunda et sequentia ipsius x a ratione quam x tenet ad illam quantitatem quae aequabiliter crescere ponitur, ex eaque pari modo definiri debent, quo hic differentialia secunda ipsius y ex differentialibus ipsius x definire docuimus. Posteriori vero casu differentialia secunda et sequentia ipsius x tanquam incognita (!) spectari (!) eorumque loco signa ddx , d^3x , d^4x etc. nuncupari debebunt.

§ 131 Cum autem quemadmodum his casibus differentiationes singulas absolvere oporteat infra fusius simus ostensuri, hic pergamus quantitatem variabilem x tanquam uniformiter crescentem assumere, quae conditio ita enumerari solet (sic), ut differentiale ipsius x , nempe dx , constans assumi dicatur.

Also immer bleibt dx ganz richtig constant und Euler redet nur verschrobne Sätze, in der Angst, die er vor dem späteren Capitel hat, wo das dx als variabel auftreten soll.

Dieses folgende Capitel (das achte) beginnt §. 242 — — Si differentiale primum — — non ponitur constans, — — tum Pdx (das ist das erste Differenzial) constat ex dua-

bus quantitatibus variabilibus — — — et erit ut sequitur:

I Sit $V = x$ erit $dV = dx$

$$d^2(V) = d^2x \text{ etc.}$$

II Sit $V = x^2$ erit $dV = 2xdx$

$$d^2 V = 2xd^2x + 2dx^2$$

$$d^3 V = 2xd^3x + 6dxd^2x$$

$$d^4 V = 2xd^4x + 8dxd^3x + 6(d^2x)^2$$

$$d^5 V = 2xd^5x + 10dxd^4x + 20d^2xd^3x$$

III Sin in genere fuerit $V = x^n$

$$\text{erit } dV = nx^{n-1}dx$$

$$d^2 V = nx^{n-1}d^2x + n(n-1)x^{n-2}dx^2$$

$$d^3 V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxd^2x$$

$$+ n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$

$$d^4 V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x$$

$$+ 3n(n-1)x^{n-2}d^2dx^2$$

$$+ 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2d^2x$$

$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$

Also Euler nimmt nicht blos in den Fällen zweier Variablen, sondern auch bei einer, bei x^2 , und schon bei x selbst unendlich viele Differenziale, aber nur nachträglich an. Eine seltsame Lehre! Es ist aber der innere Sitz oder die Ursache dieser seltsamen nachträglichen Lehre in dem jetzt erst vorbereiteten §. 246, und man sieht darin, dass diese Lehre wie wir im Anfang angenommen nur in Berücksichtigung der Fälle zweier Variablen, die man nicht beide constant denken mochte, entstanden ist. Wir lassen wieder Euler reden. §. 246. Si expressio proposita duas variables involvat x et y , vel unius differentiale ponitur

constans vel neutrius, arbitrium enim est alterutrius differentiale constans assumi, quia ab arbitrio pendet, quemadmodum unius valores successivos crescere statuere volumus. Neque vero utriusque variabilis differentialia simul statui possunt constantia, hoc ipso enim relatio inter x et y assumeretur, quae tamen vel nulla est vel incognita ponitur. Si enim dum x aequabiliter crescere ponimus y quoque aequalia incrementa capere statueretur, tum eo ipso indicaretur fore $y = ax + b$, sicque y ab x penderet, quod tamen assumere non licet. Hanc ob rem vel unius tantum variabilis differentiale constans assumi potest, vel nullum. — — His positis — — differentietur (wenn $f(x, y) = V$ gesetzt wird) $dV = Pdx + Qdy$ et reperietur

$$d^2 V = Pd^2x + pdx^2 + 2rdxdy + Qd^2y + qdy^2$$

Si igitur Differentiale dx statuatur constans erit

$$d^2 V = pdx^2 + 2rdxdy + Qd^2y + qdy^2$$

sin autem differentiale dy statuatur constans foret

$$d^2 V = Pd^2x + pdx^2 + 2rdxdy + qdy^2$$

§. 248. Sit igitur $V = xy$, erit

$$dV = ydx + xdy$$

$$d^2 V = yd^2x + 2dxdy + xd^2y$$

$$d^3 V = yd^3x + 3dyd^2x + 3d^2ydx + xd^3y$$

$$d^4 V = yd^4x + 4dyd^3x + 6d^2xd^2y + 4dxd^3y + xd^4y$$

in quo exemplo coefficientes numerici legem potestatum binomii sequuntur (dies sagt Euler mit Recht nur ganz beiläufig, während Leibniz dies zu einem Wunder machte, zum consensus memorabilis), — — Quae differentialia cum sint generalissime sumta, nullo differentiali pro con-

stante habito, hinc facile ea differentialia derivari poterunt, quae oriuntur si vel dx vel dy statuatur constans.

Dies Alles klingt ganz schön, wenn nur Euler nicht von seiner Ehrlichkeit und seiner Einsicht gezwungen noch hinzusetzte, dass diese schönen differentialia generalissime sumta nullo differentiali pro constante habito, gar nichts bedeuten. Eben nemlich nachdem Euler das Bisherige gelehrt hat, sagt er §. 251: Quia nullo differentiali constante assumto, nulla etiam lex secundum quam successivi variabilium valores progredientur, praescribitur, differentialia secunda et sequentium ordinum non erunt determinata, neque quicquam(!) certi significabunt. Deutlicher kann eine Lehre sich nicht selbst den Hals abschneiden, als die Lehre von der unbedingten Variabilität und der unendlich vielen Differenziale der Functionen es hier thut. Quo haec ratio, sagt Euler noch an dieser Stelle, formularum, in quibus differentialia secunda vel altiora insunt, facilius perspiciatur, contemplemur primum formulas, unicam variabilem continentes, atque facile patet, si in quapiam formula insit ipsius variabilis x differentiale secundum d^2x , nullumque differentiale constans statuatur, formulam nullum valorem (sic) fixum habere posse. Si enim statuatur differentiale ipsius x constans, fiet $d^2x = 0$; sin autem ipsius x^2 differentiale $2x dx$ (seu $x dx$) constans ponatur, cum ipsius $x dx$ differentiale $x d^2x + dx^2$ sit $= 0$ fiet $d^2x = -\frac{dx^2}{x}$. Alii valores prodibunt, si aliarum ipsius x functionum differentialia constantia ponantur — — Neque ergo (formulae) determinatum valorem habere possunt, nisi definiatur, cujusmodi differentiale constans sit assumtum. §. 253. Idem — — in differentiali tertio — — —. Ex quo manifestum est, si in quapiam formula differentialia tertia vel altiora occurrant, neque simul indicetur, cujusmodi differentiale assumtum est constans, eam formulam

nullum certum valorem habere (sic), atque adeo nihil prorsus significare (sic); quamobrem tales expressiones in calculo (sic) occurrere non possunt. §. 263. Ex his igitur sequitur differentialia secunda et altiorum ordinum revera nunquam in calculum ingredi, atque ob vagam significationem prorsus ad Analysin esse inepta. Quando enim differentialia secunda adesse videntur, vel differentiale quodpiam primum vel nullum assumitur constans. Priori casu differentialia secunda prorsus ex calculo evanescent, dum per differentialia prima determinantur. Posteriori casu autem, nisi se mutuo destruant, tantum apparenter adsunt, et revera solae quantitates finitae cum suis differentialibus primis adesse censendae sunt. Quoniam tamen saepissime, apparenter tantum, in calculo usurpantur, necesse fuit, ut methodus eas tractandi exponeretur. Modum autem mox ostendemus cujus ope differentialia secunda et altiora semper exterminari queant. §. 279. Ex his principiis etiam facile erit expressionem differentialium, in qua quodpiam differentiale constans est, transmutari in aliam formam in qua aliud differentiale constans assumatur. — — §. 280.

Si — — formula, in qua dy constans est positum, transmutari debeat in aliam in qua dx sit constans, tum loco d^2x substitui debet $-\frac{dxdy}{dy}$ et loco d^3x haec expressio

$$\frac{3dxd^2y}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}.$$

Si formula in qua dx constans est assumtum transmutari debeat in aliam in qua $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ sit constans, quia ob $dx^2 + dy^2$ constans fit $dxd^2x + dyd^2y = 0$ et $d^2x = -\frac{dyd^2y}{dx}$ hoc valore loco

$$d^2x \text{ assumto, pro } d^2y \text{ scribi debebit } d^2y + \frac{dy^2d^2y}{dx^2} \\ = \frac{(dx^2 + dy^2)d^2y}{dx^2}.$$

Mit diesem Satz beschliesst Euler die Untersuchung. Das was nach unsrer Meinung bei Leibniz ein Fehler war, weil Leibniz die unbedingte Variabilität des dy nicht ausdrücklich annahm, es als z , aber nicht gleich als ein ganz und gar unbestimmtes nehmend, das ist bei Euler nicht mehr ein Fehler, aber mehr als ein Fehler, ein Verbrechen. Wir rufen jedem, der uns sagen will, Alles auch dy und dx etc. könne als variabel gedacht werden, entgegen: nein! halt!! irgendwo muss fester Boden sein, und mit dem festen Boden beginnen wir, deshalb ist dx constant. Auf Euler dringt diese Wahrheit, dass dx und dy constant, überall ein, aber er hält sich hartnäckig an der Voraussetzung, dass Alles variabel sei, fest, wie ein Ertrinkender an einem Strohalm. Er wehrt sich gegen die Wahrheit, die überall neben ihm liegt, die er nicht auflesen. Seine Geständnisse: Quia nullo differentiali constante assumto, nulla etiam lex est — — wobei nur quoniam frequenter evenire solet ut non x sed alius cujuspiam quantitatis incrementa aequalia assumantur, eine geschrobne Einleitung gegeben wurde, die zu nichts führt, da dx und dy immer zuerst richtig als constant genommen werden, und auf ihre Variabilität nur hinpraeludirt, und die Variabilität hier als möglich, dort als nothwendig, und dann wieder das Gegentheil als das Schicklichste dargestellt ist, das alles beweist, dass die ratio aequalitatis, oder wie Euler auch einmal mit unsrem Wort dies nennt, die arithmetica progressio, wirklich die richtige ist für das x oder aptissima quae ipsius x incrementis tribuitur, mit andren Worten, dass unsre Ansicht berechtigt ist, nach welcher x , die einfachste Grösse mit dx dem einfachsten Differenzial das Mass sind für andres. Wir citirten Michelsen's Uebersetzung gleichfalls bei den Uebergangspartikeln §. 124 „Da also“ und §. 126 „Da ferner,“ denn hier ist es, wo Euler in Verlegenheit ist, und hinter diese

Partikeln, weil das „da“ in ein „wenn“ hineinschimmert, sich versteckt, oder es umgeht, sich zu entscheiden, ob er im Differenzial von x in dem dx die Constanz als Regel und die Variabilität als Ausnahme, oder diese als Regel, und jene bloß als ein „wenn einmal“ denken will. Nachdem Euler so im Zwielficht eines andren, im Gedanken nur supponirten Falles, qui evenire potest, den festen Boden, die Constanz des dx für den Anfang erschlichen hat, macht er später das dx muthig variabel und gradeheraus zu einer neuen, man weiß nicht woher kommenden Function, und was das Unglaublichste und wirklich Komischste ist, zu einer *functio incognita*. Von dieser *functio incognita* sagt dann Euler mit Recht alles mögliche Schlechte, dass sie in *calculo evenire non potest* u. s. w. u. s. w. Es ist auch in der That, wenn dx eine *functio incognita* ist, nichts zu sagen, weil dann wirklich nichts mehr erkannt werden kann. Euler sollte sich zu gut gehalten haben in leerem Formalismus Theorien zu erbauen, quae in *calculus* ingredi non possunt. Die neueren elementaren Lehrbücher (und es scheint, dass man seit mehr als 50 Jahren die Leser von Büchern, in denen eine ganze Wissenschaft behandelt wird, immer als Schüler denkt, denen man die Schwierigkeiten verbergen muss, weshalb man „Lehrbücher“ zu schreiben so sehr gewohnt ist, dass diese Art neumodischer Scholastik die ganze Wissenschaft zu verdunkeln bedrohen kann) diese modernen Lehrbücher lassen jene Euler'schen Gedanken als beängstigende Gespenster unbesprochen. Die schlauesten Schriftsteller, oder die naivsten, denn wir können ihnen nicht in's Herz sehen, z. B. Lacroix *Traité élem.* 3te Ausg. sagen ganz richtig (Nr. 17, S. 21): *Il faut observer que le coefficient différentiel du second et troisième ordre etc. se tirent des différentielles successives en regardant l'accroissement dx comme une constante*, Lacroix bleibt bei diesem

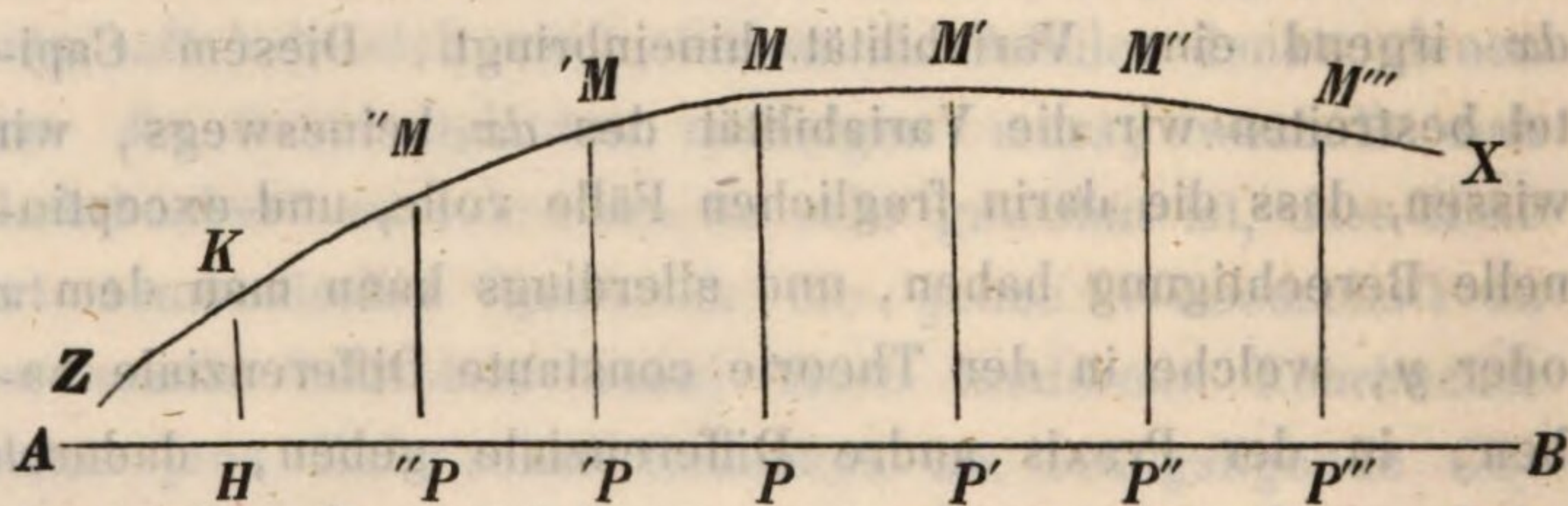
richtigen Gedanken auch wenn mehrere Variable zu differenziren sind, nochmals hinzufügend Nr. 44, S. 56 en regardant dx et dy comme des constantes. Niemand sagt uns aber, wenn so nach Lacroix dx und dy immer als constant angesehen werden, warum sie bloß so angesehen werden. Ein Differenzial, welches überall als constant angesehen wird, ist constant, und das ist nun unsre Lehre. Deshalb leugnen wir, dass die Function xy unendlich viele Differenziale hat, irgendwie anders als x^2 , und deshalb leugnen wir, dass ein consensus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis (von dem Leibniz und Bernoulli so naiv viel Aufhebens machen), in dem Vergleich von der zufälligen leeren Formel $d^m(xy)$ mit $(x + y)^m$ irgend eine Bedeutung habe. Jene Function xy hat zwei Differenziale und alles Andre geht die Theorie noch nichts an. Man hat aus dem grössten Theil der Euler'schen (vorstehend citirten) Gedanken in den Lehrbüchern ein Capitel formirt, dem ganz richtig die Ueberschrift Du changement de la variable indépendante (Nr. 129 in dem citirten Werke von Lacroix) gegeben worden ist. In dieses Capitel gehört aber alles das hinein, was in das dx irgend eine Variabilität hineinbringt. Diesem Capitel bestreiten wir die Variabilität des dx keineswegs, wir wissen, dass die darin fraglichen Fälle volle, und exceptionelle Berechtigung haben, und allerdings kann man dem x oder y , welche in der Theorie constante Differenziale haben, in der Praxis andre Differenziale geben, dadurch wird x oder y irgend eine complicirtere Function, die wir nur einen Augenblick abusive x oder y nennen, wie man in der niederen Algebra auch einen langen Ausdruck, der ungeändert oft wiederkehrt, kurz mit einem Buchstaben bittweise y oder etwa x nennen kann, mit der Bedingung, dass man sich zur rechten Zeit erinnere, dass er nicht so einfach ist, sondern Form hat. Hat aber deshalb

x die Natur von $\frac{\sqrt{x^2 - y^3}}{\cos \varphi}$ etc. weil ich einmal dies letztere

x nenne? Wenn in der Differenzialrechnung eine Gleichung gesetzt wird $y = x^2$, und nun differenziert wird, so ist es nicht y welches differenziert wird, sondern x^2 , und es ist cum grano salis zu verstehen, wenn das Resultat sich als $\frac{d(y)}{dx} = 2x$ hinsetzt, wo y nur als Stellvertreter

für x^2 in der Formel lebt, weshalb man auch lieber $\frac{d(x^2)}{dx}$

$= 2x$ statt dessen schreiben sollte, wenn die andre Schreibart nicht um anderer Gründe wegen nothwendig wird. Diese Substitutionen liegen zunächst ausserhalb der Differenzialrechnung, in einem Scholium mag man am Ende der Differenzialrechnung immerhin sagen, x , und y etc. können auch anders als einfach variabel gedacht werden, ihre anderweitige Variabilität muss man dann im Gedanken behalten, und dem entsprechend alle Resultate der Differenzialrechnung geändert denken. Cousin (traité du calcul différentiel 1796 Paris) sagt §. 111. Soit



une ligne courbe XMZ qui ait pour diamètre la ligne AB et pour une de ses ordonnées la ligne PM . Soit $AP = x$; $PM = y$; et soient y' ; y'' ; y''' Y ; les ordonnées qui correspondent aux abscisses $x + \Delta x$; $x + 2\Delta x$; $x + 3\Delta x$; $x + n\Delta x$; on aura $y' = y + \Delta y$; $y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$; $y''' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y$

$$+ \Delta^3 y \text{ et } Y = y + n \Delta y \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 y + \dots \text{ etc.}$$

§. 112. Nous aurions pu faire toute autre hypothèse que de supposer Δx constant, comme par exemple que les Δy , $\Delta y'$, $\Delta y''$ etc. fussent égaux entre eux, ou, ce qui revient au même, que Δy fût constant; alors XMZ n'étant pas une ligne droite Δx aurait été variable, ou ce qui est la même chose les portions PP' , $P'P''$, etc. n'eussent point été égales entr'elles. Hier irrt Cousin. Variabilität von Δx und que les portions ne sont pas égales, sind keineswegs dieselbe Sache. In der vorstehenden Abhandlung haben wir schon S. 7 und S. 72 das Wort constant in dem Sinne genommen, dass es diese Willkürlichkeit einschliesst. Nicht dadurch wird dx variabel, dass man die constante Bewegung darin de facto hier gross dort klein sein lässt, und jedes Stück für sich bedenkt, sondern es würde variabel, wenn gar keine zwei Punkte in ihm sich gleich wären, was der Fall ist, wenn x z. B. x^2 würde, und doch noch x hiesse, und in andren Fällen. Also Leibnizens Wort in seiner ersten Abhandlung von 1684 (in den act. erud. Lips. d. h. a. S. 473) dx , quae assumi potest pro arbitrio verkennt schon ebenso, dass dadurch noch dx nicht variabel wird, und Euler's Systematisirung hängt damit eng zusammen, und alle übersehen, wie man hier an Cousin, der ein Beispiel hinstellt, sieht, dass Variabilität des dx etwas andres ist, als seine blos hier grössere dort kleinere Masse, da dessen inneres Wesen constant bleiben kann. Beim endlichen practischen speciellen Rechnen, bei Taylor's Reihe, kommt es auf die Grösse von dx an, hier in der allgemeinen Rechnung nur auf seine Natur, die immer noch constant bleibt auch wenn es als arbiträrconstant hier grösser dort kleiner ist. Der ganze Unterschied unsrer Ansicht von den andren Ansichten ist nur, dass wir sagen, dx ist zuerst constant, kann aber

hinterher auch als variabel gedacht werden (*assumi potest variabilis*), während man bisher sagte, dx sei zuerst variabel, es könne aber irgendwo als constant genommen werden (*assumi posse constans, en considérant la différentielle comme une constante*).

Mit den unrichtigen, im Keime schon bei Leibniz sich findenden, von Euler consequent entwickelten, bei Leibniz unklaren Gedanken in Betreff der höheren Differenziale, tadelte man Newton, und nannte seine von einer andren wichtigen Seite her völlig richtige tiefste Ansicht einen Fehler. Ueber diesen Vorwurf wollen wir noch einige Worte sagen um auch hier unsre Ansicht gegen frühere abzugrenzen.

Das Scholium des Newton, am Ende des Tractats de quadratura, lautet: Quantitatum fluentium fluxiones esse primas secundas tertias quartas, aliasque diximus supra. Hae fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium. Ut si z^n sit quantitas fluens, et fluendo evadat $(z + o)^n$ deinde resolvatur in seriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ooz^{n-2} + \frac{n^3 - 3nn + 2n}{6} o^3 z^{n-3} + \text{etc.}$

terminus primus hujus seriei z^n erit quantitas illa fluens, secundus noz^{n-1} erit ejus incrementum primum, seu differentia prima, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima;

tertius $\frac{nn-n}{2} ooz^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum, seu differentia secunda cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda; quartus $\frac{n^3 - 3nn + 2n}{6} o^3 z^{n-3}$ erit ejus in-

crementum tertium seu differentia tertia, cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est; et sic deinceps in infinitum.

Dies soll ein Fehler sein, und man nimmt an, dass Newton eingesehen, dass sein Scholium irrthümlich sei.

Bernoulli schreibt darüber (ep. CCVI loc. cit. II S. 310 a. 1713): Agnatus meus mihi ostendit, Newtonum in suo errore permansisse usque ad annum 1711 quo libellus, — fuit recusatus — — In exemplari quod mihi nunc (1713) dono misit per Agnatum meum, calamo adscripsit altera vice voculam ut — ubi habebantur haec verba „tertius (terminus) $\frac{nn-n}{2} o^2 z^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum, et quartus $\frac{nn-3nn+2n}{6} o^3 z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium”; interseruit „ut”, scribendo nunc „erit ut ejus” etc. Adeo ut errorem suum etc. Dies hängt folgendermassen zusammen. Im Jahr 1704 und gleich wieder 1706 erschien zuerst jenes Scholium, und 1711 hat Newton es in einer zweiten Ausgabe wiederholt. Als nun 1713 Bernoulli glaubte diese Betrachtungsweise sei irrthümlich, und er durch seinen Neffen dies den Newton mündlich wissen liess, dann aber befürchtend, dass Newton durch Aenderung zuvorkommen würde, dennoch dies auch öffentlich rügte, in Beziehung auf Newton's principia I prop. X, 3, wo im einzelnen Fall ein fehlerhaftes Resultat sich findet, da hat Newton auf die mündliche freundliche Bemerkung in das Scholium das Wörtchen ut mit der Feder hineingefügt, dadurch, wie Bernoulli glaubte, sich allgemein als irrend bekennend. Vielmehr aber hat Newton dadurch, abgesehen von der Stelle in den principiis, die später besprochen war, in Betreff dieses Scholium's nur sich gegen Bernoulli's unrichtige zu enge Interpretation verwahrt, indem er nur das ut welches schon einmal im Anfang sich findet, auch später noch wiederholt. Denn das erste ut, so wie wir es Seite 132 Zeile 20 hier druckten, findet sich nicht erst in späteren sondern in allen Ausgaben (ich verglich besonders die Ausgabe von 1706). Wenn die Recensio Collinsii etc. von 1715, die in den actis regiae societatis Lon-

dinensibus, und in dem Diario Literario Tom. VII erschien und die auch dem commercium epistolicum Collinsii et aliorum in der Ausgabe von 1722 vorgedruckt ist, wie Horsley der Herausgeber von Newtons Werken ausdrücklich und bestimmt behauptet (opera Newtoni ed. Horsley T. 1. S. 384. Cf. Brewster Memoirs of Newton und Biot Journal des savants 1855 Oct.) von Newton selbst herrührt, oder er diese Recension in diesem Punkte (was jedenfalls anzunehmen) vor ihrem Erscheinen kannte, so haben sich die Gedanken Newton's auch noch 1715 dahin zurückgewendet, und er blieb fest bei der Wahrheit gegen die Ansicht der späteren Mathematiker, die sie als Newton's Fehler ansehen. Es ist also, wie wir glauben, unrichtig zu sagen, dass Newton dieses Scholium als irrthümlich zurückgenommen, da er nur wo jedesmal erit ejus gelesen wird das Wort ut, welches er in der zweiten Zeile schon gleich geschrieben hatte, wieder hineinsetzte, lesend erit ut ejus. Vielmehr beweist dies, dass Newton bei seiner Ansicht von dem Zusammenhang der durch gewöhnliche Rechnung bewirkten Entwicklung der Functionen in Reihen und der successiven Differenziale durchaus beharren wollte. Mit Unrecht nannte man also dies bis jetzt einen Irrthum.

Newton konnte gar nicht so irren, da er nicht blos Regeln, sondern den Himmel und die Natur in lebendiger Anschauung vor sich hatte, in welcher die philosophisch theoretisch möglichen Irrthümer sich nicht finden und ihm, dem Newton, überhaupt die ganze Mathematik in ihrer speciellen Ausführung der Mühe werth war, während Leibniz von sich sagt, eo paratus sum ingenio ut rem in potestate habuisse plerumque contentus sim, und man ihn lobte, dass er in tanta nobilitate positus ad res mathematicas voluisset descendere. Man könnte, glaube ich, sagen: den symbolismus memoriabilis calculi algebraici et infinitesimalis (dies ist die Ueberschrift die Leibniz seiner

Abhandlung in den Miscellaneis Berolinensibus gab) d. h. das Verhältniss der Differenzialrechnung zur Algebra haben Leibniz und Bernoulli nicht geahndet. Newton hat das Verhältniss geahndet, was man ihm zum Fehler anrechnete, und Taylor hat es allgemein gefasst, ohne darüber ein Bewusstsein zu haben. Denn Taylor's Reihe ist, was Leibnizens Idee nicht ist, der *symbolismus memoriabilis calculi infinitesimalis et algebraici*, d. h. die Taylor'sche Entwicklung ist die wieder in die Algebra zurückgeführte Differenzialrechnung. Von der höchsten Abstraction, von der reinsten Allgemeinheit geht die Differenzialregel wieder herab zur Taylor'schen Anwendung. Diese ist eine unendliche Reihe, wenn auch der Differenziale erst eine unendliche Menge zusammen die volle Antwort auf die Frage geben. Sind dagegen der Differenziale eine bestimmte Anzahl, indem endlich der constante Schlussstein, der letzte Coefficient erscheint, so sind dann auch in Taylor's Reihe der Glieder Anzahl nur jene bestimmte Menge. Beide, Taylor's Reihe und die Anzahl der Differenziale, sind unendlich, oder endlich, je nachdem die Rectification (d. h. die arithmetische Ordnung), einer schwierigen Gesetzlichkeit, völlig oder nicht völlig erreicht wird. Dass in der Taylor'schen und den ähnlichen andren Anwendungen zu den abstracten in der Differenzialsprache ausgesprochenen Regeln, als Divisoren, die Nenner $2; 2 \cdot 3; 2 \cdot 3 \cdot 4; 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$, hinzukommen, das ist begründet in dem tiefsten Wesen der Zahl. Es fehlt den Geometern und fehlt auch mir noch jetzt — denn was darüber in dieser Abhandlung zu sagen versucht wurde, ist gewiss noch häufig ungenügend — eine richtige Ansicht über das Wesen der Zahl, über die Eins und ihr Verhältniss zur Vielheit, zur Allheit, und zum Nichts oder zur Null. Was bedeutet die Eins? was darf sie? was will sie? Solche erste Fragen hält man für uninteressant. Man meint die Mathematik sei nur ihrer

Anwendungen wegen die wichtigste Wissenschaft. Es müsste jedoch seltsam sein, wenn die Mathematik nicht auch zu Mehrerem gut sein sollte, und ihr Interesse nicht tiefer läge als man meint. Im 15ten und 16ten Jahrhundert hiess es, man betreibe die Mathematik mit dem Eifer der damaligen Zeit, damit Sonnenuhren darnach gebaut werden könnten. Jetzt sagt man, Differenziale und Integrale seien wichtig wegen der Chemie, oder wegen der Akustik. Der Sitz des Interesses der Mathematik liegt aber anderswo, weshalb auch die Mathematiker von jeher, in Widerspruch mit dem was man sagte, die Mathematik ihrer selbst wegen getrieben haben. Das Interesse liegt in Wahrheit zuerst in jenen ersten Fragen, in den Axiomen, die man immer stiefmütterlich behandelt. Fängt man freilich alle Axiome nur damit an, Zwei die einem Dritten gleich sind sind sich selbst gleich, so ist dies langweilig. Aber vor diesem als erstes betrachtetem Axiom liegt ein andres, dass es Einse giebt, und also derselben auch mehrere, zwei und drei, von denen die Regel redet, was man vor den Axiomen als Definitionen hinstellte. In diesen ersten Fragen liegt das ewig Reizende das ewig Weibliche der Mathematik, das alle Geister zuerst zu ihr hinführt, die später vielleicht im Detail ein neues Interesse finden, und das die Kinder in ihrem ersten Spiel an dem Erscheinen einer Eins Freude empfinden lässt. Der Mensch hat sich selbst seine Eins, in der Arithmetik vor sich, und seinen Zusammenhang mit der Welt in der Geometrie, die er an einander misst und die er mit einander so gerne vergleichen möchte, um sich als wirkliche Eins, als unauslöschliches Ich und doch zugleich als Theil des untrennbaren Ganzen zu fassen. Die Metaphysik vor 2000 Jahren, die sich mit dem altberühmten Axiom von Zweien die einem Dritten gleich sind (denn ein Axiom ist der Ausdruck des metaphysischen Bewusstseins einer Zeit) begnügen

konnte, erreicht natürlich nicht mehr die Tiefe des jetzigen allgemeinen Bewusstseins.

Weil überhaupt die Axiome den Geometern noch nicht begreiflich sind, und wohl noch lange nicht begreiflich werden, konnten Leibniz und seine Nachfolger irren, und Newton's Ansicht lief Gefahr immerhin als Irrthum zu gelten, wie man ihr überhaupt nicht die richtige Tragweite gegeben hat.

Ein wesentlicher Punkt ist, dass die Algebra und die Differenzialrechnung als eine Wissenschaft erscheinen. Bis jetzt waren sie im Kampf mit einander. Die eigenthümliche Ansicht des Lagrange, der die Differenzialrechnung durch die Algebra tödten möchte, damit diese nicht von jener getödtet werde, zeigt die Spitze des Zerwürfnisses dieser beiden Disciplinen, deren Identitäts-Indifferenzpunkt man nun nimmer wiederfinden zu wollen scheint. Diese beiden, die Algebra und die Differenzialrechnung sind die beiden Königskinder, sie konnten zu einander nicht kommen, das Wasser war allzutief.

Wie Alles was darüber in England richtig gedacht wurde, anderswo unrichtig aufgenommen wurde, das zeigt sich in den Worten, mit denen Taylor's Werk (*methodus, incrementorum*) von Bernoulli und Leibniz (im *comm. ep. II. S. 380, ep. CCXXXII*) kritisirt wird, wo Leibniz sagt: *accepi Taylori Methodum quem vocat incrementorum. Est applicatio Calculi differentialis et integralis ad numeros, vel potius ad magnitudines generales. Ita Angli equos, ut in proverbio est, adjungunt post currum. Ego incepti Calculum differentialem a numerorum seriebus, eoque utiliter usus sum ad summas Serierum numericarum et postea animadvertens in Geometria differentias et summas dare quadraturas et multa ob incomparabilitatem evanescere in lineis (in der Geometrie), via naturali perveni a Calculo generali ad specia-*

lem geometricum seu infinitesimalem. Es ist nun gar nicht möglich eine unrichtigere Ansicht von der Differenzialrechnung zu haben, und mehr die Pferde hinter den Wagen zu spannen, als hier Leibniz thut und dem Taylor mit Unrecht vorwirft. Es scheint zuerst als ob Leibniz ganz auf dem richtigem Wege war, incepti calculum differentiarum a numeribus, aber Leibniz deutet damit nur, wie er auch sonst thut, auf ein Werkchen, das er als 19jähriger Mann schrieb, und in dem wirklich nicht viel gutes steht, gleich nachher sehen wir in der hier citirten Stelle, dass Leibniz die Differenzialrechnung für einen calculum geometricum hält, in welchem das wegfalle, was arithmetisch in ihm sei. Also weil das erste Differenzial allein auch schon eine geometrische Anwendung verträgt, die dem Leibniz bekannt wird, und die auch jetzt noch eine überwiegende Rolle in der Differenzialrechnung spielt, deshalb soll die ganze Differenzialrechnung etwas Geometrisches sein und deshalb ignorirt man die höheren Differenziale, und deshalb konnte jetzt Snell zweihundert Jahre nach Erfindung dieser Rechnung, noch sich verwundernd erinnern, dass irgend welche Gedanken „über die directe Bedeutung der höheren Differenziale“ (d. h. also über die höheren Differenziale) zu haben, kaum einem der jetzt lebenden Geometer auch nur irgend ein Bedürfniss sei. Man kann sagen die Erfindung der Differenzialrechnung ist gleich bei ihrer Erfindung durch ihre geometrische Anwendung aufgehalten worden. Leibniz irrt sehr, wenn er glaubt, dass seine Ansicht mehr algebraisch (weniger geometrisch) sei, als die der damaligen Englischen Mathematiker. Der alte, tapfere, und ehrwürdige Engländer Wallis, dessen tractatus algebrae theoret. et historicus Montucla sehr mit Unrecht tadeln will, der seines Landmannes Harriot Priorität vor Descartes wo es nöthig war, vindizirte, der 1697 den Leibniz um Entschuldigung bat,

si locorum distantia fecerit, ut eruditissima tua scripta et inventa, hac aetate (er war 77 Jahre als er sein bestes mathematisches Werk den tract. alg. hist. et theor. in 2ter Ausgabe vollendete, und war nun 80 Jahr als er dieses schrieb) minus ego sciverim, aut intellexerim quam vellem; et quidem quis sit ille tuus calculus differentialis non satis mihi compertum sit, nisi quod mihi nuper nunciatum est, eum cum Newtoni doctrina fluxionum quasi coincidere. — Und in einem andren Briefe: At nolim ego Te, quem magni aestimo, a me quoquo modo laesum iri. Sed gratulor potius, Te in tanta nobilitate positum, ad res nostras mathematicas descendere voluisse. (Comm. epist. Collinsii 73 und 75). So schrieb Wallis an Leibniz vor dem Ausbruch des wirklichen Streites über die Erfindung der Differenzialrechnung zwischen den beiden, denn so sagen wir noch immer Erfindern derselben. Dieser Engländer mag statt aller andren darüber citirt werden, dass in dem Jahrhundert, das sich schon selbst das grosse nannte, in welchem England in den Wissenschaften wahrlich höher noch, als das sich seiner damaligen allerdings gleichfalls bedeutenden Höhe doch zu sehr rühmende Frankreich gestiegen war, dass damals im 17ten Jahrhundert, in der Geometrie, in England die grossen Männer Oughtredus, Harriot, Barrow, Wallis, Newton der Befreiung der Algebra von der Vormundschaft der Geometrie (und darum handelt es sich noch immer) näher waren, als irgend Jemand derzeit oder jetzt. Wir citiren aus Wallis darüber Folgendes: Si quis (sagt Wallis 1693 in dem 78ten Capitel des Tractatus historicus, welches Capitel er eigends überschrieb de demonstrationibus in Arithmetica infinitorum) Si quis meas demonstrationes, eo quod absque Figurarum et Linearum pompa procedant, minoris aestimet, ego plane secus sentio. Quamvis enim Figurae Lineaeque descriptae omnino necessariae videantur, quoties Propositionis veritas

dependet a positione Locali, possintque etiam usui esse juvandae Phantasiae (dum id oculo subjicitur, verbi gratia, in uno quantitatis genere, puta in Lineis, quod abstracte verum est de omne genus quantitibus): Ubi tamen veritas Propositionis dependet ex mera Numeri seu Propositionis natura, naturalius illud et magis genuine ex Numerorum aut Rationum natura demonstratur, absque perplexo linearum et figurarum apparatu. Verbi gratia. Ubi probandum fuerit quod Ter quatuor sunt Duodecim (sive de Homini- bus sive de Angelis, sive de aliis quibusvis rebus quae sunt numerabiles) multo aptius id fit et magis genuine ex Numerorum et Multiplicationis natura, quam si descripto Rectangulo-Parallelogrammo, cujus Latitudo sit Unciarum

	12		

trium et Longitudo Unciarum quatuor, Aream esse unciarum quadraticarum duodecim; (welche Beweisart also damals anderswo gebräuchlich war, und auch noch jetzt be-
nuzt werden sollte, wenn man doch in hö-
heren Lehren(!) die Geometrie herbeilässt).

Quamvis nempe hoc verum sit, est tamen omnino praeter propositum; neque huic probabitur Ter quatuor Angelos (der Glaube an die Engel hatte hier und überhaupt sein Gutes, er verhin- derte (?) materialistische Ansichten) esse duodecim Angelos ubi nihil est Linearum, Unciarum, Parallelarum aut Rectorum angulorum; neque etiam eo quod tres drachmae (quae dicuntur) monetae Anglicae, conficiunt (quem vocant) num- mum Solidum; et ne quidem eo, quod Ter quatuor mil- liaria conficiunt Duodecim milliaria (quamvis enim hic Lineae sunt, nihil tamen Areae, aut superficialis magnitudinis). Et vel maxime hoc tantum probat, nimirum Propositionem illam esse, uno saltem casu veram, quae etiam in aliis omnibus est universaliter vera. Neque potest inde probari haec uni- versalis propositio, nisi id aliunde assumendo (ex Numero- rum et Rationum natura) quod universali probandae suffice-

ret etiam absque illa particulari. So bewahrte Wallis (denn es folgen nun viele Anwendungen und eine Widerlegung von des Franzosen Fermat's Widerreden) die Engländer vor der grossen Geometrie-Liebhaberei, die seltsamer Weise man jetzt in Frankreich als Englisch ansieht. Leibniz und die Franzosen*) sind, wie sehr sie sich auch dessen wehren mögen, in der Geometrie viel tiefer drin geblieben. Apparet, sagt Leibniz (im Comm. ep. II S. 291) um zu bemerken, dass er selbst, nicht Newton, am meisten der Erfinder der Differenzialrechnung sei, apparet ex literis quas accepi, Newtonum tunc summam rei in seriebus ponere — — at longe aliud est methodus differentialis, und noch deutlicher in seiner Kritik über Taylor an der schon citirten Stelle: Angli equos post currum, ego incepti a seriebus, sed postea perveni ad calculum Geometricum. Als ob es eine Rechnungsart des Raumes! einen calculum (sic) geometricum, ein bleiernes Eisen gäbe.

Die Algebra ist schwerer zu verstehen, weil allgemeiner; die Geometrie ist dagegen leichter. Die Wissenschaft beginnt mit dem Specielleren, Leichterem, daher ist im Al-

*) Biot im Journal der Savants 1852 S. 141. Cette idée (de la génération des quantités) était chez Leibniz toute abstraite, tandis que chez Newton elle est associée à l'idée de mouvement. On la perfection d'un procédé analytique c'est d'être pure de toute notion de physique. La différence est donc ici à l'avantage de Leibniz. Man sieht, dass Biot die Geometrie für eine reine Mathematik hält. Zufrieden mit den falschen Erklärungsweisen der Differenzialrechnung sagt Biot in demselben Journal 1832 S. 268 le progrès des applications du calcul infinitésimal rendant (a rendu) sa métaphysique de plus en plus évidente, während Snell ganz anderer Meinung ist, nemlich sagt, dass diese Erklärungsweisen die klaffenden Risse der Widersprüche kaum nothdürftig verschmieren. So verschieden sind an den verschiedenen Seiten des Rheines die Ansprüche an die Metaphysik überhaupt und an die Metaphysik der Differenzialrechnung insbesondere.

terthum diese Wissenschaft zuerst Geometrie, aber ihre Jünger die noch jetzt Geometer heissen, müssen diesen nur historisch berechtigten Namen nicht für a priori berechtigt halten. Die Wissenschaft der (blos) räumlichen Gesetzlichkeit, die Geometrie, in die Wissenschaft der Gesetzlichkeit überhaupt, in die Algebra hineinzuhoben, das ist die Aufgabe; die Geometrie muss nicht weniger fast als die Akustik, als eine angewandte Mathematik betrachtet werden. Einen *calculus geometricum*, der wohl gar neben sich einen *calculus acusticum* haben soll, erfinden, wie Leibniz geglaubt hat, heisst die Sache verkennen. Wallis vorzüglich bewahrte die Engländer vor dieser Geometrie-Ansteckung, die in der Mathematischen Luft hängt.

Was im einzelnen Newton betrifft, so zeigt die ganze Redeweise der von ihm in diesem Punkte gewiss genehmigten Recension; also es zeigen Newton's letzte Erklärungen 1715 über die Sache, dass er Bernoulli's Tadel in der That gar nicht einmal verstanden hatte, und nie verstehen konnte, weil er, obgleich er sein Hauptwerk rein geometrisch schrieb, die übertrieben geometrische und flache Ansicht von der Differenzialrechnung die jenseits des Canals herrschte, gar nicht für möglich gehalten haben würde. Taylor gab 1715 seine Reihe ganz unschuldig, aber dieser in der Discretion verweilende mehr algebraische Gedankengang der Insulaner war dem Continent, wo das Continuum vorzüglich die Geometer interessirte, so neu, dass man die Taylor'sche Reihe für etwas besonderes hielt, was auch erst nach Taylor's Tode, als dieser sich darüber nicht mehr erklären konnte, geschehen zu sein scheint. Newton der die Taylor'sche Reihe in einem ihrer Fälle, nemlich die Verallgemeinerung der Binomialpotenz-Form schon 1671 und was wohl zu beachten gleichzeitig mit seiner Differenzialrechnung in Briefen publicirte, der von jeher in der Binomialreihe nichts als die

successiven Differenziale vor sich zu haben überzeugt war, liess sich, weil er nur noch nicht ganz sicher die Art des Zusammenhangs der gewöhnlichen Rechnung mit der Differenzialrechnung gefasst hatte, wohl herab, ein ut, welches auch vorne schon nie fehlte, in die Stelle seines Scholiums hineinzuschreiben, um dadurch nicht seinen Satz zu widerrufen, wie Bernoulli geglaubt zu haben scheint, sondern die nur äusserlich verschiedene Erscheinung anzuerkennen, wie er sie auch nie bestritten hatte. Aber keineswegs hat Newton concedirt eine falsche Ansicht gehabt zu haben und geglaubt hundert Jahre lang Montucla's malitiöse Bemerkungen über seinen kleinen Fehler verdient zu haben, ebensowenig wie Taylor wusste etwas so ausserordentliches entdeckt zu haben und dass man seine Gedanken equos post currum nennen würde.

Mit einer wehmüthigen Stimmung lege ich die Feder nieder, da ich nach allem Muth mit dem ich gegen grosse Männer, vielleicht hart um nur deutlich zu sein, meine Ansicht ausgesprochen habe, doch jetzt wohl fühle, dass eben das das Beste ist, was mir fehlt, was ich in dieser Arbeit und in meinen Studien fast unbeachtet liess. Denn was ist es, was den Newton so sicher sich wissen liess, dass er selbst das was man ihm als Fehler vorhielt, und wovon er wohl glaubte, dass es ihm nicht ganz klar sei, dennoch nicht aufgab, was ist es, das ihm diese Festigkeit, diese Sicherheit gab, als die inhaltvolle Beziehung zu den wirklichen Naturproblemen, die Erinnerung dass die Gesetze der Welt, der Planeten, die Richtigkeit seiner Ansicht bewähren, während ich ohne in die speciellen Anwendungen hineinzugehen, nur eo paratus sum ingenio ut rem in potestate habuisse contentus sim. Denn dass die Zurückbeziehung rein theoretisch-mathematischer Regeln auf logisch metaphysische Gedanken, deren ich mich bestrebe, auch als Prüfstein gelten könne, wage ich nicht

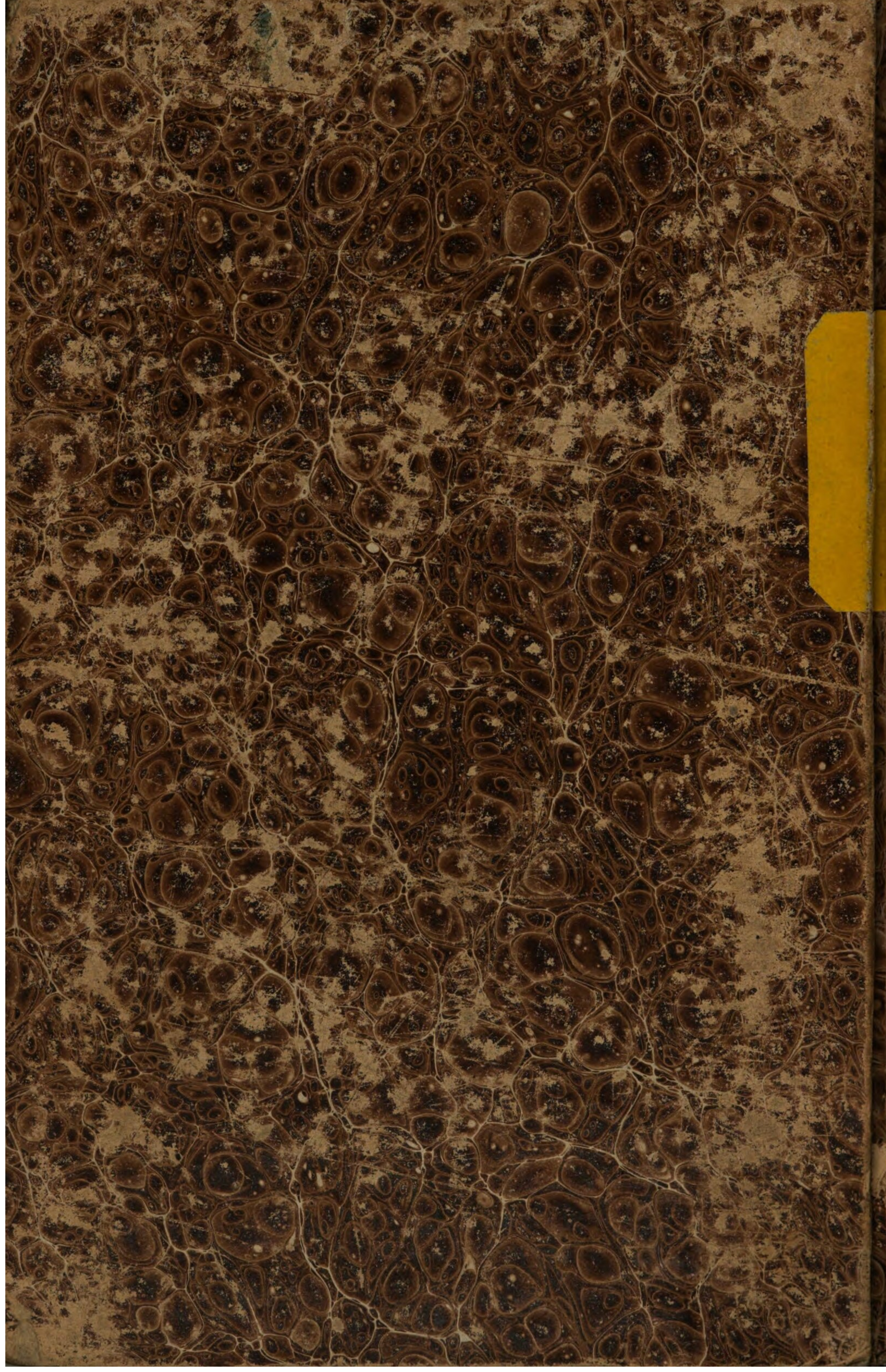
zu behaupten. Wie sollte ich auch nicht fühlen, dass das was Newton's Werke allein unsterblich macht, die abgerundete Form der Darstellung dieser meiner Abhandlung die bald vergessen werden wird, wenn sie auch nicht tot geboren sein sollte, auch gänzlich fehlt.

Göttingen,

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner.)



Scrim



Sloman, Henry Brarens,

Versuch die Differenzialrechnung auf andre als die bisherige Weise zu begründen eine mathematische Abhandlung

Paris 1856

Math.p. 530 r

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082838-8